



Universidad Carlos III de Madrid
Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Técnica Industrial especialidad en Mecánica

Desarrollo de una interfaz gráfica en Matlab para el análisis modal de vigas

Autor:
Sergio Moreno López

Tutora:
Belén Muñoz Abella
Departamento de Mecánica

Octubre de 2014

Resumen

El presente proyecto fin de carrera trata del desarrollo de una interfaz gráfica en Matlab para el análisis modal de vigas bajo distintas condiciones de contorno, con o sin masa puntual, mediante la teoría de Euler-Bernoulli de vigas continuas. Asimismo, se elabora un guión de prácticas que describe el uso del programa y facilita la comprensión del análisis modal de vigas a los alumnos de la asignatura “Vibraciones” de 4º curso de Grado en Ingeniería Mecánica.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Objetivos | 2 |
| 1.3. Estructura del documento | 2 |
| 2. Antecedentes | 5 |
| 2.1. Vibraciones | 5 |
| 2.1.1. Partes de un sistema vibratorio | 5 |
| 2.1.2. Grados de libertad | 5 |
| 2.1.3. Sistemas discretos y continuos | 6 |
| 2.1.4. Tipos de vibraciones | 7 |
| 2.1.5. Análisis de sistemas vibratorios | 8 |
| 2.1.6. Resortes | 9 |
| 2.1.7. Masa | 9 |
| 2.1.8. Amortiguamiento | 10 |
| 2.1.9. Frecuencias naturales | 11 |
| 2.1.10. Movimiento armónico simple | 11 |
| 2.2. Vibraciones de vigas | 12 |
| 2.2.1. Vibración transversal | 13 |
| 2.2.2. Vibración transversal de vigas continuas con masa puntual . . | 27 |
| 2.3. Método de elementos finitos | 33 |
| 2.3.1. Ecuaciones de movimiento de un elemento | 33 |
| 2.3.2. Matriz de masa, matriz de rigidez y vector fuerza de un elemento viga | 34 |
| 2.3.3. Ecuaciones de movimiento del sistema de elementos finitos . . | 37 |
| 2.3.4. Incorporación de las condiciones de contorno | 38 |
| 2.3.5. Frecuencias naturales y modos propios de vibración | 38 |
| 2.4. Matlab | 43 |
| 2.4.1. Guide | 44 |
| 3. Desarrollo | 51 |
| 3.1. Descripción de la interfaz gráfica de AMVI | 52 |
| 3.1.1. Condiciones de contorno | 53 |
| 3.1.2. Geometría de la viga | 55 |
| 3.1.3. Material | 63 |
| 3.1.4. Masa puntual | 66 |
| 3.1.5. Elementos finitos | 70 |
| 3.1.6. Análisis modal | 70 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.1.7. | Frecuencias naturales | 72 |
| 3.1.8. | Modos propios normalizados | 74 |
| 3.2. | Comprobación del funcionamiento del programa AMVI | 81 |
| 3.2.1. | Comprobación nº 1 | 81 |
| 3.2.2. | Comprobación nº 2 | 84 |
| 3.3. | Ejemplos | 91 |
| 3.3.1. | Ejemplo 1: viga de aluminio | 91 |
| 3.3.2. | Ejemplo 2: viga de cobre | 99 |
| 3.3.3. | Ejemplo 3: viga de acero | 102 |
| 4. | Guión de prácticas | 111 |
| 5. | Conclusiones y desarrollos futuros | 151 |
| 5.1. | Conclusiones | 151 |
| 5.2. | Desarrollo futuros | 151 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Sistema de 1 grado de libertad | 6 |
| 2.2. Sistema de 2 grados de libertad | 6 |
| 2.3. Sistema de 3 grados de libertad | 6 |
| 2.4. Viga empotrada con infinitos grados de libertad | 6 |
| 2.5. Viga empotrada con masa puntual en su extremo libre y su deformada | 9 |
| 2.6. Modelado de la figura 2.5 | 10 |
| 2.7. Trayectoria AOB de la masa en un movimiento armónico | 11 |
| 2.8. Sección de una viga | 12 |
| 2.9. Viga en flexión | 13 |
| 2.10. Viga libre en ambos extremos con masa propia distribuida | 16 |
| 2.11. Viga en voladizo | 19 |
| 2.12. Viga biempotrada | 21 |
| 2.13. Viga con extremos empotrado y apoyado | 23 |
| 2.14. Viga biapoyada | 25 |
| 2.15. Viga con extremos apoyados con masa puntual | 27 |
| 2.16. Viga con extremos libres con masa puntual | 28 |
| 2.17. Viga en ménsula con masa puntual | 29 |
| 2.18. Viga con extremos empotrados con masa puntual | 30 |
| 2.19. Viga con extremos empotrado y apoyado con masa puntual | 31 |
| 2.20. Viga con extremos apoyados con masa puntual | 32 |
| 2.21. Modelado de elementos finitos | 33 |
| 2.22. Elemento finito de una viga | 35 |
| 2.23. Ventana de inicio de Matlab | 43 |
| 2.24. Editor de Matlab | 44 |
| 2.25. Asistente de creación de interfaces gráficas para Guide | 45 |
| 2.26. Herramienta Guide - Plantilla sin contenido | 45 |
| 2.27. Listado de propiedades de un texto dinámico | 47 |
| 2.28. Archivo *.m con la lógica del programa | 48 |
| 2.29. Acciones asociadas a un texto dinámico | 49 |
| 3.1. Programa de análisis modal de vigas (AMVI) | 51 |
| 3.2. Panel de condiciones de contorno disponibles en AMVI | 53 |
| 3.3. Diagrama de flujo del panel de selección de condición de contorno | 54 |
| 3.4. Panel de la geometría de la viga | 55 |
| 3.5. Mensajes de error del campo “Longitud” | 56 |
| 3.6. Panel de la masa puntual habilitado | 57 |
| 3.7. Primera parte del diagrama de flujo del campo “Longitud” | 58 |
| 3.8. Segunda parte del diagrama de flujo del campo “Longitud” | 59 |

| | |
|---|----|
| 3.9. Panel de tipo de sección | 60 |
| 3.10. Diagrama de flujo del panel de selección de la sección transversal . . . | 61 |
| 3.11. Diagrama de flujo del campo “Anchura” | 62 |
| 3.12. Panel de selección del material de la viga | 64 |
| 3.13. Diagrama de flujo del menú de selección del tipo de material | 65 |
| 3.14. Panel “Masa puntual” | 66 |
| 3.15. Error “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo” > “Longitud de la viga” | 67 |
| 3.16. Lógica de selección de la casilla “Existe masa puntual” | 68 |
| 3.17. Diagrama de flujo del campo “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo” | 69 |
| 3.18. Panel de elementos finitos | 70 |
| 3.19. Comprobación de introducción de valores en los campos | 71 |
| 3.20. Lógica del botón “Calcular” | 72 |
| 3.21. Frecuencias naturales resultantes | 73 |
| 3.22. Diálogo de guardado de frecuencias naturales | 74 |
| 3.23. Panel de representación de modos propios | 74 |
| 3.24. Panel de selección de modo propio a representar | 75 |
| 3.25. Errores de “Nº de modo propio” | 76 |
| 3.26. Diagrama de flujo del campo de selección del panel “Nº de modo propio” | 77 |
| 3.27. Diálogo de guardado del modo propio normalizado | 78 |
| 3.28. Ventana de configuración de gráfica de modo propio a guardar | 79 |
| 3.29. Diálogo de guardado de gráfica de modo propio | 80 |
| 3.30. Valores de entrada y resultados del análisis numérico de la compro- bación nº 1 | 83 |
| 3.31. Montaje experimental de la viga de la comprobación nº 2 | 85 |
| 3.32. Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0$ para la comprobación nº 2 | 87 |
| 3.33. Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,1$ para la comprobación nº 2 | 87 |
| 3.34. Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,3$ para la comprobación nº 2 | 88 |
| 3.35. Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,5$ para la comprobación nº 2 | 88 |
| 3.36. 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (con- tinuación en la figura 3.37) | 93 |
| 3.37. 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (con- tinuación de la figura 3.36) | 94 |
| 3.38. Datos introducidos del ejemplo 1 en AMVI | 95 |
| 3.39. Resultados del ejemplo 1 en AMVI | 95 |
| 3.40. 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos me- diante AMVI (continúa en la figura 3.41) | 96 |
| 3.41. 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos me- diante AMVI (continuación de la figura 3.40) | 97 |
| 3.42. Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación en la figura 3.43) | 98 |
| 3.43. Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación de la figura 3.42) | 99 |

| | |
|--|-----|
| 3.44. 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 2 (continúa en 3.45) | 100 |
| 3.45. 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 2 (continuación de 3.44) | 101 |
| 3.46. Sección de viga IPE200 | 102 |
| 3.47. 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 3 (continúa en la figura 3.48) | 103 |
| 3.48. 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 3 (continuación de la figura 3.47) | 104 |
| 3.49. 5 primeros modos propios normalizados numéricos del ejemplo 3 (continúa en la figura 3.50) | 106 |
| 3.50. 5 primeros modos propios normalizados numéricos del ejemplo 3 (continuación de la figura 3.49) | 107 |
| 3.51. Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 3 | 108 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 2.1. Soluciones de la ecuación (2.42) | 17 |
| 2.2. Primeras 4 frecuencias naturales de viga con extremos libres | 18 |
| 2.3. Soluciones de la ecuación (2.54) | 20 |
| 2.4. Primeras 4 frecuencias naturales de viga en voladizo | 20 |
| 2.5. Soluciones de la ecuación (2.64) | 22 |
| 2.6. Primeras 5 frecuencias naturales de viga biempotrada | 23 |
| 2.7. Soluciones de la ecuación (2.74) | 24 |
| 2.8. Primeras 5 frecuencias naturales de viga con extremos empotrado y apoyado | 25 |
| 2.9. Primeras 3 frecuencias naturales de una viga biapoyada | 27 |
| 3.1. Propiedades de la viga a analizar en la comprobación nº 1 | 81 |
| 3.2. Primeras cinco frecuencias naturales experimentales de la comproba- ción nº 1 | 82 |
| 3.3. Primeras cinco frecuencias naturales teóricas del sistema analizado en la comprobación nº 1 | 82 |
| 3.4. Primeras cinco frecuencias naturales del sistema analizado obtenidas mediante AMVI para la comprobación nº 1 | 83 |
| 3.5. Comparación de las primeras cinco frecuencias naturales obtenidas mediante métodos experimental, teórico y AMVI | 84 |
| 3.6. Errores relativos en el cálculo de las frecuencias naturales mediante AMVI | 84 |
| 3.7. Propiedades de la viga analizada en [5] | 85 |
| 3.8. Resultados experimentales de la comprobación nº 2 | 86 |
| 3.9. Valores de I_y , A y M de la viga ensayada | 86 |
| 3.10. Valores teóricos de la frecuencia fundamental de la viga 3.31 | 86 |
| 3.11. Resultados obtenidos por el programa AMVI de los diferentes siste- mas experimentales en la comprobación nº 2 | 89 |
| 3.12. Comparación de las frecuencias naturales obtenidas mediante méto- dos experimental, teórico y AMVI de la comprobación 2 | 89 |
| 3.13. Errores relativos entre las frecuencias naturales obtenidas mediante método experimental y numérico (AMVI) y método teórico y numé- rico (AMVI) de la comprobación 2 | 90 |
| 3.14. Propiedades del ejemplo 1 | 91 |
| 3.15. Primeras 5 frecuencias naturales teóricas de la viga del ejemplo 1 | 92 |
| 3.16. Primeras 5 frecuencias naturales numéricas del ejemplo 1 | 96 |
| 3.17. Comparación de las primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 1 por los métodos teórico y numérico | 98 |

| | |
|---|-----|
| 3.18. Propiedades del ejemplo 2 | 99 |
| 3.19. Primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 2 | 100 |
| 3.20. Propiedades del ejemplo 3 | 102 |
| 3.21. Primeras 5 frecuencias naturales teóricas del ejemplo 3 | 103 |
| 3.22. Primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 3 obtenidas mediante AMVI | 105 |
| 3.23. Comparación de las primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 3 por los métodos teórico y numérico | 107 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

La presencia de las vibraciones en nuestro alrededor es una constante.

Los estudios iniciales de vibraciones se centraron en la comprensión del fenómeno y en el desarrollo de modelos matemáticos para su descripción. Sin embargo, en las últimas décadas su estudio ha estado motivado por sus aplicaciones ingenieriles en el diseño de máquinas, cimientos, estructuras, motores, turbinas y sistemas de control.

Una estructura o componente de una máquina sometida a cargas alternativas puede fallar a fatiga. Por ello, la vibración produce mayor desgaste de piezas mecánicas, como cojinetes o engranajes, así como mayor ruido. En máquinas, afloja uniones. En corte de metales, produce peores acabados superficiales. Por otra parte, toda vibración requiere cierta energía para producirse, lo que reduce el rendimiento en la máquina que la produce.

Un sistema sometido a una vibración cuya frecuencia coincide con alguna de las frecuencias naturales del sistema, se ve sometido al fenómeno de resonancia. La resonancia produce en el sistema, de forma progresiva, vibraciones con mayores amplitudes a la vibración excitadora, que en el peor de los casos produce el fracaso del material. Por ello, es esencial estudiar el comportamiento vibratorio de los sistemas objeto de desarrollo.

El ser humano forma parte de numerosos sistemas ingenieriles sujetos a vibración. Las vibraciones generan un estado de fatiga en las personas situadas en la vecindad donde se producen, dando lugar a una pérdida de rendimiento en su trabajo y malestar. Los motores generan vibraciones y ruido, que producen desde molestias hasta daños a la propiedad. La vibración de paneles de lectura de instrumentos dificulta su uso y su funcionamiento. Por todo ello, uno de los principales objetivos del estudio de vibraciones es reducirlas mediante el diseño apropiado de sistemas y sus soportes.

Sin embargo, las aplicaciones prácticas de las vibraciones son igual de importantes. Ejemplos de ello son: cintas transportadoras, tolvas, compactadoras, tamices, lavadoras, cepillos eléctricos, taladros de dentista, relojes, dispositivos de masaje eléctrico, plantado de pilotes, pruebas vibratorias de materiales, procesos de acabado por vibración, circuitos electrónicos filtradores de frecuencias no deseadas. Asimismo, la vibración mejora la eficiencia del mecanizado, fundición, forja y soldadura. Permite la simulación de terremotos para investigaciones geológicas y diseño de reactores nucleares.

De igual modo, las vibraciones pueden emplearse para analizar la buena o mala calidad estática de una estructura, puesto que si la frecuencia de vibración es alta, es señal de tener buena amplitud para recuperar rápidamente su forma anterior a la perturbación. En cambio, si es baja muestra poca aptitud recuperadora. Esta propiedad se suele utilizar para comprobar si una estructura está próxima o lejos del colapso, por el fenómeno de la inestabilidad del equilibrio elástico.

1.2. Objetivos

Los objetivos del presente proyecto son:

- El cálculo de las frecuencias naturales de vigas, con distintas características (longitud, sección, material), bajo distintas condiciones de contorno, definidas mediante el modelo de vigas elásticas de Euler-Bernoulli.
- Representación de los modos propios normalizados de vibración para las distintas frecuencias naturales del sistema.
- Desarrollo de una interfaz gráfica, llamada AMVI (Análisis Modal de Vigas), desarrollada en Matlab que permita la gestión de las propiedades del sistema a analizar y de los resultados y gráficos obtenidos.
- Redactar una memoria de prácticas de laboratorio para la asignatura “Vibraciones” de 4º curso de la titulación Grado en Ingeniería Mecánica en la que se discuta el empleo del programa, la teoría en la que se fundamenta, se propongan ejercicios que permitan comprenderla y una serie de preguntas para evaluar el grado de comprensión adquirida en la práctica.

1.3. Estructura del documento

Los contenidos del presente proyecto se disponen de la siguiente manera:

- Capítulo 1: Introducción

Donde se plantea la importancia de las vibraciones y el análisis modal de sistemas, los objetivos del presente proyecto y la estructura del mismo.

- Capítulo 2: Antecedentes

Se expone la teoría sobre la que se desarrolla la lógica de la interfaz gráfica AMVI.

- Capítulo 3: Desarrollo

En el capítulo tercero se explica el uso y comportamiento de la interfaz gráfica para el análisis modal del sistema. Asimismo, se presentan 2 comprobaciones del correcto comportamiento del programa, realizándose la comparación con sistemas reales, y se presentan 3 ejemplos del uso de la interfaz.

- Capítulo 4: Guión de prácticas

Estando dirigida la elaboración del programa AMVI al uso didáctico en sesión de prácticas en aulas informáticas, se acompaña el guión de prácticas correspondiente.

- Capítulo 5: Conclusiones y desarrollos futuros

Capítulo final en el que se analizan el desarrollo del proyecto, las decisiones tomadas, posibles alternativas y desarrollos futuros.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Vibraciones

Se denomina vibración u oscilación a cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo. Constituyen el movimiento de un sistema elástico respecto a una posición de equilibrio estático o dinámico que se repite durante un intervalo de tiempo denominado período.

El número de períodos por unidad de tiempo es la frecuencia.

El desplazamiento máximo del sistema o de una parte de él, respecto a dicha posición, se denomina amplitud de la vibración en aquel elemento. El camino total recorrido por el cuerpo en la vibración es el doble de dicha amplitud.

Hay 2 tipos generales de vibración: rectilínea y torsional. La rectilínea aparece, a su vez, en 2 formas: longitudinal (compresión o extensión alternativa de barras, cables y muelles) y transversal o lateral (movimiento alternativo de vigas perpendicularmente a su eje elástico). La amplitud de la vibración rectilínea tiene dimensiones de longitud. La torsional aparece bajo la forma de movimiento circular alternativo en ejes, medido en radianes o grados.

2.1.1. Partes de un sistema vibratorio

Un sistema vibratorio, en general, posee 3 elementos fundamentales:

- Almacenamiento de energía potencial (resortes o elasticidad).
- Almacenamiento de energía cinética (masa o inercia).
- Disipación gradual de energía (amortiguamiento).

La vibración de un sistema supone la transformación de su energía potencial a energía cinética y de su energía cinética a energía potencial, alternativamente. Si el sistema es uno amortiguado, parte de esa energía se disipa en cada ciclo de vibración y debe ser añadida al sistema en forma de fuerzas externas si se desea mantener un estado estacionario de vibración.

2.1.2. Grados de libertad

Se define grados de libertad de un sistema vibratorio como el mínimo número de coordenadas independientes necesarias para determinar las posiciones de todos los elementos del sistema a lo largo del tiempo.

En función de los grados de libertad se definen sistemas de 1 grado de libertad (figura 2.1), de 2 grados de libertad (figura 2.2), de 3 grados de libertad (figura 2.3) o de infinitos grados de libertad (figura 2.4).

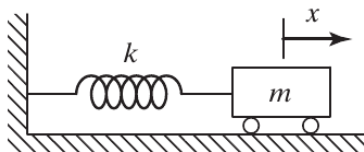


Figura 2.1: Sistema de 1 grado de libertad

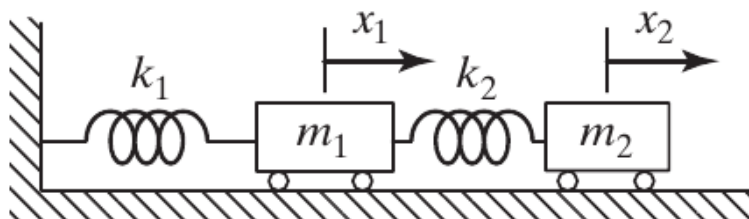


Figura 2.2: Sistema de 2 grados de libertad

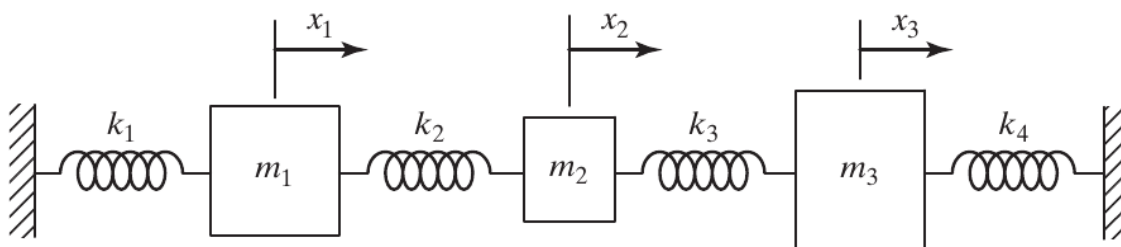


Figura 2.3: Sistema de 3 grados de libertad

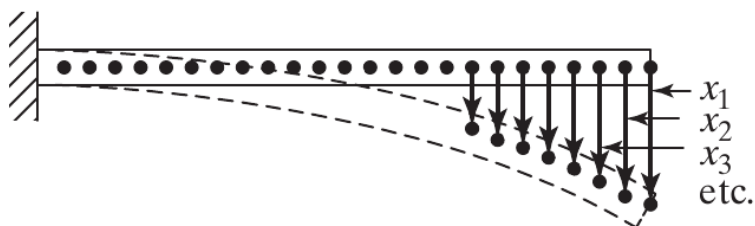


Figura 2.4: Viga empotrada con infinitos grados de libertad

2.1.3. Sistemas discretos y continuos

Los sistemas vibratorios con un número finito de grados de libertad son denominados discretos (2.1, 2.2, 2.3). Aquellos que poseen un número infinito de grados de libertad se denominan sistemas continuos (2.4).

2.1.4. Tipos de vibraciones

Vibraciones libres y forzadas

Vibraciones libres Si un sistema es dejado vibrar tras una alteración inicial, la vibración resultante es conocida como vibración libre. En estos sistemas no existen fuerzas externas. La oscilación del péndulo simple es un ejemplo de vibración libre.

Vibraciones forzadas Si un sistema es sometido a fuerzas externas, la vibración resultante se denomina vibración forzada. Ejemplo: vibración producida en los motores de combustión interna.

En el caso de que la fuerza externa sea periódica y la frecuencia de dicha fuerza coincida con una frecuencia natural del sistema, se produce un fenómeno en el que el sistema es sometido a vibraciones de gran amplitud, llamado resonancia.

El fenómeno de resonancia puede producir fallos de integridad en estructuras, máquinas, vehículos, etc., al someter a los mismos a vibraciones con amplitudes mayores a las que serían capaces de soportar. Un ejemplo bien conocido es la rotura del puente de Tacoma[1] o la entrada en resonancia del puente Arcos de Alconétar durante su construcción sobre el río Tajo (a la altura del embalse de Alcántara)[8].

Vibraciones amortiguadas y no amortiguadas

Aquellas vibraciones que disipan energía a lo largo del tiempo se denominan amortiguadas. Aquellas que no disipan energía se denominan no amortiguadas.

Vibración lineal y no lineal

Cuando todos los elementos del sistema (resortes, masa y amortiguadores) trabajan de forma lineal, la vibración resultante se denomina vibración lineal. En caso de que alguno de dichos elementos no se comporte de forma lineal, la vibración será no lineal.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un sistema lineal y otro no lineal son, respectivamente, lineales y no lineales.

En el caso de vibración lineal, es aplicable el principio de superposición, estando las herramientas matemáticas para su análisis muy desarrolladas. En contraposición, en el caso de vibraciones no lineales, el método de superposición no es aplicable y las herramientas matemáticas de análisis no están tan desarrolladas.

Todos los sistemas en vibración tienden a comportarse de forma no lineal con el incremento de la amplitud de las oscilaciones.

Vibraciones deterministas y aleatorias

Las vibraciones deterministas son aquellas en las que la magnitud de la excitación actuando en un sistema vibratorio es conocida a lo largo del tiempo.

Las vibraciones aleatorias son aquellas en las que la magnitud de la excitación sobre el sistema no es conocida a lo largo del tiempo.

La forma de trabajar con este tipo de vibraciones es a través de cantidades estadísticas (media, varianza, desviación típica, etc.).

La velocidad del viento, la rugosidad de las carreteras o el movimiento del terreno

durante terremotos son algunos ejemplos de fenómenos analizados como vibraciones aleatorias.

2.1.5. Análisis de sistemas vibratorios

Un sistema vibratorio es aquel sistema dinámico donde las excitaciones (entradas) y las respuestas (salidas) dependen del tiempo. La respuesta de un sistema vibratorio depende de las condiciones iniciales, así como de las excitaciones externas. La mayoría de los sistemas vibratorios son muy complejos y es imposible contemplar todas las características del mismo al realizar un análisis matemático. Sólo las características más importantes del mismo son tenidas en cuenta en el análisis para predecir su comportamiento.

El análisis de un sistema se estructura en:

- Creación de un modelo matemático.
- Planteamiento de las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema.
- Solución de dichas ecuaciones.
- Interpretación de resultados.

Modelo matemático Tiene el objetivo de seleccionar todas las características importantes del sistema para el planteamiento de las ecuaciones. Debe incluir suficientes detalles para describir el sistema sin que sea demasiado complejo ya que con cuanto mayor rigor se haga esta selección, tanto más exactos serán los resultados obtenidos.

El modelo matemático puede ser lineal o no lineal. Los modelos lineales proporcionan soluciones rápidas y fáciles de trabajar. Sin embargo, los modelos no lineales representan mejor la realidad del comportamiento de un sistema a costa de una mayor complejidad.

Planteamiento de ecuaciones Partiendo del modelo matemático, se aplican los principios de la dinámica al diagrama de cuerpos libres de todas las masas involucradas en el sistema para así obtener las ecuaciones.

Normalmente, las ecuaciones de un sistema vibratorio discreto son ecuaciones diferenciales ordinarias y para uno continuo, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Dependiendo del comportamiento de los elementos del sistema, las mismas pueden ser lineales o no lineales.

Para hallar las ecuaciones se pueden emplear diferentes métodos: la segunda ley de Newton, el principio de D'Alembert o el principio de conservación de la energía.

Resolución de ecuaciones Las ecuaciones del movimiento deben ser resueltas para encontrar el movimiento del sistema vibratorio.

Se pueden emplear distintos métodos: métodos para resolver ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace, matriciales y métodos numéricos.

Interpretación de resultados La solución de las ecuaciones proporciona los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de las masas que componen el sistema.

2.1.6. Resortes

Un resorte es un elemento mecánico elástico capaz de almacenar energía y desprenderse de ella sin sufrir deformación. En la mayoría de las aplicaciones se puede despreciar su masa, así como su amortiguamiento.

El ejemplo más característico es el del resorte helicoidal, aunque cualquier cuerpo elástico puede considerarse un resorte. Ejemplos de ello son cables, vigas, placas, etc.

Un resorte se define como lineal si su incremento en longitud x se relaciona con la fuerza F de la siguiente manera:

$$F = kx \quad (2.1)$$

donde:

F : es la fuerza realizada por el resorte

k : es la constante de rigidez del resorte

x : es el incremento de longitud del resorte

El trabajo realizado (U) para deformar el resorte es almacenado por el sistema como energía potencial. Viene dado por:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.2)$$

2.1.7. Masa

En los sistemas vibratorios el elemento de masa es considerado un sólido rígido. El trabajo realizado sobre una masa será igual a la fuerza multiplicada por el desplazamiento de la misma a lo largo de la dirección de aplicación de la fuerza. El trabajo sobre la masa se almacenará en forma de energía cinética.

Al realizar el análisis del modelo matemático se especifican los distintos elementos que conformarán el sistema. En el siguiente ejemplo, figura 2.5, se considera una viga en ménsula con masa puntual en su extremo libre:

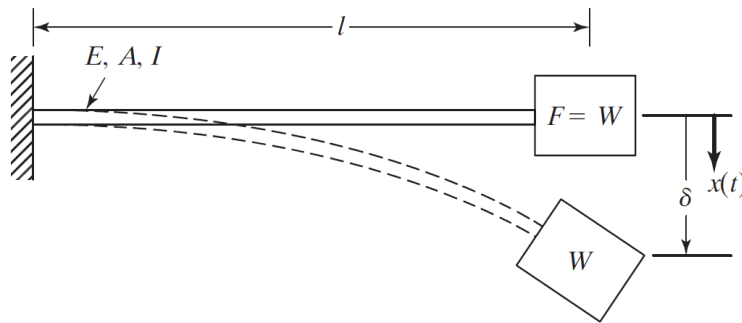


Figura 2.5: Viga empotrada con masa puntual en su extremo libre y su deformada

Para realizar un análisis rápido y bastante preciso, la masa y el amortiguamiento de la viga se desprecian.

El sistema puede modelarse como sigue en la figura 2.6:

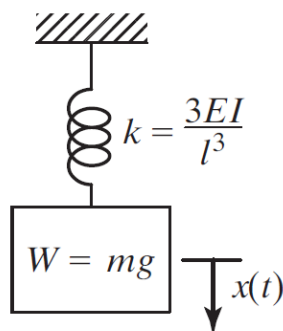


Figura 2.6: Modelado de la figura 2.5

El bloque de masa (m) representa la masa del sistema y el valor de la elasticidad de la viga es la rigidez del resorte (k).

2.1.8. Amortiguamiento

En un sistema vibratorio la energía que contiene el mismo se disipa progresivamente en forma de calor o sonido, y por lo tanto, también lo hace su desplazamiento. Se define amortiguamiento como el mecanismo por el cual la energía vibratoria de un sistema se convierte progresivamente en calor o sonido.

Se considera al elemento amortiguador con masa y elasticidad despreciables, y sólo existe fuerza amortiguadora en un amortiguador cuando sus extremos tienen velocidad relativa.

Tipos de amortiguamiento:

Amortiguamiento viscoso. Cuando se produce la vibración de un sistema mecánico en un medio fluido como aire, gas, agua o aceite, la resistencia generada por el fluido al movimiento del sistema produce disipación de energía.

La cantidad de energía disipada depende de varios factores: tamaño y forma del cuerpo en vibración, la viscosidad del fluido, la frecuencia de la vibración y la velocidad del cuerpo en vibración.

Ejemplos de amortiguamiento viscoso: película viscosa entre superficies deslizantes, fluido alrededor de un pistón en un cilindro, flujo de fluido a través de un orificio o película de fluido alrededor de un eje en un cojinete.

Amortiguamiento por fricción seca. La fuerza de amortiguamiento es constante en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza de desplazamiento del cuerpo en vibración. Está producida mediante fricción entre superficies no lubricadas o con lubricación insuficiente.

Amortiguamiento por histéresis. Cuando un material se deforma, el material absorbe y disipa energía. Ello es debido a la fricción entre planos internos que se deslizan entre ellos cuando se produce una deformación.

2.1.9. Frecuencias naturales

Si a un sistema de un grado de libertad, no amortiguado, se le separa de su posición de equilibrio y se le deja en libertad (vibración libre), comienza a vibrar con una frecuencia que se denomina frecuencia natural.

Sistemas con n grados de libertad son capaces de vibrar con n frecuencias naturales. Cada una de ellas da lugar a una forma o modo asociado de vibración. La menor se denomina fundamental y el modo correspondiente, modo fundamental o primer modo.

2.1.10. Movimiento armónico simple

En la mayoría de los casos prácticos, la vibración es un movimiento armónico.

De todos los movimientos periódicos el armónico simple es el más sencillo. Los más complejos pueden expresarse como la superposición de varios armónicos simples, de distintas amplitudes y frecuencias, mediante la serie de Fourier.

El movimiento armónico simple puede definirse como el de una masa que es atraída a un punto fijo por una fuerza central proporcional a la distancia de la masa al punto, si la velocidad inicial es nula o está dirigida en la dirección de la fuerza.



Figura 2.7: Trayectoria AOB de la masa en un movimiento armónico

En la figura 2.7, la recta AOB representa la trayectoria de la masa. O es el punto fijo hacia el cual es atraída la masa si parte de su posición de reposo en A . La aceleración de la misma irá decreciendo a medida que se acerca a O , hasta hacerse nula en dicho punto, por lo que la velocidad entonces será máxima. A partir de este punto, dicha velocidad irá disminuyendo hasta hacerse 0 en B , situado a igual distancia de O que A . El movimiento se repite indefinidamente.

Se representa por x la distancia de la masa al punto O en un instante determinado. La fuerza con que en ese instante es atraída la masa hacia O tendrá la forma Fx (F es igual a fuerza por unidad de longitud), y la ecuación del movimiento será:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Fx \quad (2.3)$$

Se sustituye $\frac{F}{m} = w_n^2$ en (2.3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_n^2 x = 0 \quad (2.4)$$

La solución de este movimiento armónico simple es:

$$\begin{aligned} x &= C \cos(w_n t + \gamma) \\ &= C \cos(w_n t) \cos(\gamma) - C \sin(w_n t) \sin(\gamma) \\ &= A \cos(w_n t) + B \sin(w_n t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siendo C y γ constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales, $A = C \cos(\gamma)$ y $B = -C \sin(\gamma)$.

De lo anterior se deduce lo siguiente:

$$\tan(\gamma) = -\frac{B}{A} \quad y \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.6)$$

Para $t = 0$:

$$x_0 = A \quad y \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = Bw_n \quad (2.7)$$

donde A representa el desplazamiento inicial y B la velocidad inicial dividida por w_n .

2.2. Vibraciones de vigas

Una vez introducidos los conceptos previos relativos a vibraciones, estamos en condiciones de exponer los conceptos teóricos que rigen la lógica del cálculo de frecuencias naturales y modos propios normalizados de vigas con masa propia bajo distintas condiciones de contorno del programa AMVI.

A la hora de hallar las frecuencias naturales de una viga, podemos emplear distintos métodos, teniendo en cuenta las propiedades de la misma, las condiciones de contorno y las simplificaciones realizadas en el planteamiento del sistema.

La técnica más realista de cálculo es modelar la viga elástica a partir de la teoría de la elasticidad, seguido por la aplicación del método de los elementos finitos. El modelo es tridimensional con un coste computacional elevado. En la práctica se prefieren modelos unidimensionales.

Sea la sección de una viga como la mostrada en la figura 2.8:

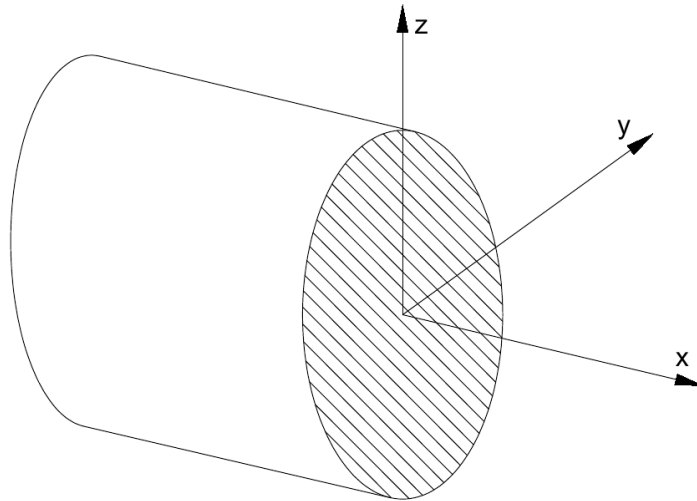


Figura 2.8: Sección de una viga

El modelo más simple de vigas elásticas es el de Euler-Bernoulli (ecuación 2.8):

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.8)$$

En la ecuación 2.8, $w \equiv w(x, t)$ es el desplazamiento vertical del eje de la viga, siendo las constantes físicas: ρ densidad, A área de la sección transversal, E módulo de elasticidad e I momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y .

El modelo de Euler-Bernoulli sólo tiene en cuenta el efecto de flexión.

Modelo de Rayleigh, 2.9, añade el efecto de inercia rotacional:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.9)$$

En la ecuación 2.9, el término $-\rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}$ representa el efecto de inercia rotacional.

En los modelos de Euler-Bernoulli y Rayleigh las secciones transversales permanecen perpendiculares al eje de la viga. Dicha suposición no se cumple en realidad, existiendo un efecto de cortante.

Un modelo que involucra todos los efectos anteriores, es decir, flexión, inercia rotatoria y cortante, es el modelo de Timoshenko, dado por la ecuación 2.10:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho}{KGA} \left(\rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

donde G y K son el módulo y el coeficiente de cortante, respectivamente.

En el presente proyecto el modelo elegido para su desarrollo ha sido el de Euler-Bernoulli. A continuación se expone el desarrollo de su ecuación de movimiento.

2.2.1. Vibración transversal

Ecuación del movimiento

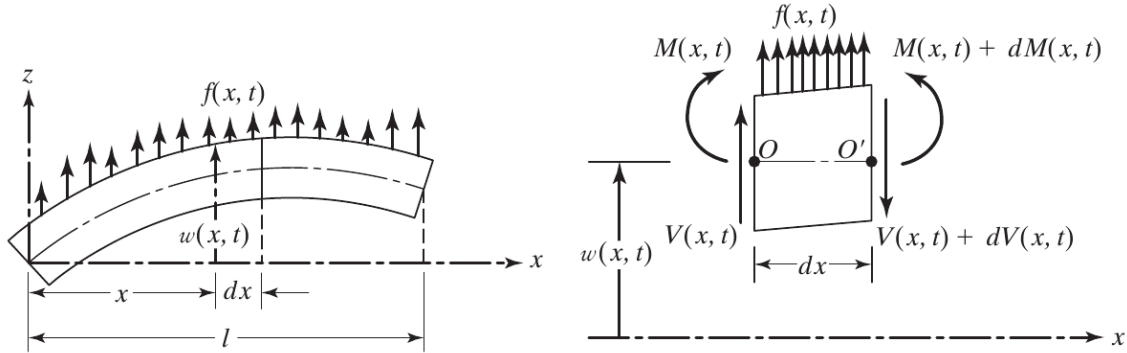


Figura 2.9: Viga en flexión

Se considera el elemento viga en equilibrio de la figura 2.9 donde $M(x, t)$ es el momento flector, $V(x, t)$ es el cortante y $f(x, t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre la viga. La fuerza de inercia que actúa sobre el cuerpo es:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.11)$$

El sumatorio de fuerzas en la dirección z es:

$$-(V + dV) + f(x, t) dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.12)$$

donde ρ es la densidad y $A(x)$ es la sección de la viga.

En 2.13 se muestra el sumatorio de momentos alrededor del eje y en el punto O :

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (2.13)$$

Si:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad y \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (2.14)$$

y despreciando los términos con segundas derivadas en dx , las ecuaciones (2.12) y (2.13) pueden expresarse como:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (2.16)$$

De (2.16) se obtiene $V = \frac{\partial M}{\partial x}$, sustituyendo en (2.15):

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.17)$$

Según la teoría de Euler-Bernoulli de vigas esbeltas la relación entre momento flector y deformación es:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.18)$$

Introduciendo la expresión (2.18) en (2.17) se obtiene la ecuación del movimiento para una vibración forzada de una viga de sección no uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (2.19)$$

Para una viga de sección uniforme:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (2.20)$$

Para una vibración libre $f(x, t) = 0$:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.21)$$

Condiciones iniciales

Ya que la ecuación del movimiento implica una segunda derivada respecto al tiempo y una cuarta derivada con respecto a x , serán necesarias 2 condiciones iniciales y 4 condiciones de contorno para hallar la solución para $w(x, t)$. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Vibración libre

La solución para la ecuación (2.21) se halla mediante el método de separación de variables:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (2.23)$$

Se sustituye (2.21) en (2.23) para obtener:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = w^2 \quad (2.24)$$

donde $a = w^2$ es una constante positiva.

La ecuación (2.24) puede expresarse como:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + w^2 T(t) = 0 \quad (2.26)$$

donde

$$\beta^4 = \frac{w^2}{c^2} = \frac{\rho A w^2}{EI} \quad (2.27)$$

La solución de la ecuación (2.26) tiene la forma:

$$T(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad (2.28)$$

donde A y B son constantes obtenidas a partir de las condiciones iniciales.

La solución de la ecuación (2.25) es de la forma:

$$W(x) = C e^{sx} \quad (2.29)$$

donde C y s son constantes. La ecuación característica de la ecuación es:

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (2.30)$$

Sus raíces:

$$s_{1,2} = \pm \beta \quad s_{3,4} = \pm i\beta \quad (2.31)$$

La solución de la ecuación diferencial (2.25) es:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \\ &= C_1 \cos \beta x + C_2 \sen \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes diferentes que se hallan a partir de las condiciones de contorno.

Las frecuencias naturales de la viga se obtienen a partir de la expresión (2.27):

$$w = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (2.33)$$

$W(x)$ es el modo propio de la viga.

Para cualquier viga existirán infinitos modos propios y frecuencias naturales, cada una de ellas asociada a un modo propio.

En los siguientes apartados se analizan distintas condiciones de contorno junto con los respectivos valores de C_1, C_2, C_3, C_4 y β .

Condiciones de contorno

Viga libre en ambos extremos Se considera una viga con ambos extremos libres como la de la figura 2.10:

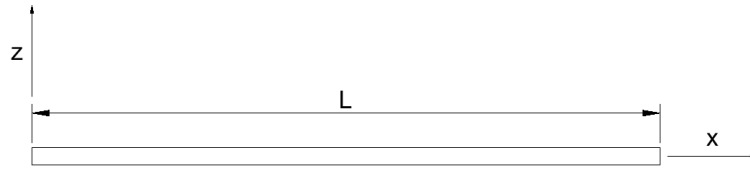


Figura 2.10: Viga libre en ambos extremos con masa propia distribuida

Se parte de la ecuación (2.25):

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sen \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sen \beta x \\ \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sen \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\ \frac{d^3 W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sen \beta x \end{aligned} \quad (2.34)$$

Las condiciones de contorno implican:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x=0) \\ \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Cortante nula en } x=0) \\ \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x=L) \\ \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Cortante nula en } x=L) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sustituyendo las condiciones (2.35) en las ecuaciones (2.34) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_4 &= C_2 \\ C_3 &= C_1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$C_1(\sinh \beta L - \sen \beta L) + C_2(\cosh \beta L - \cos \beta L) = 0 \quad (2.37)$$

$$C_1(\cosh \beta L - \cos \beta L) + C_2(\sinh \beta L + \sen \beta L) = 0 \quad (2.38)$$

Se expresan de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sinh \beta L - \sen \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sen \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Para que el sistema de ecuaciones homogéneas (2.39) en C_1 y C_2 nos dé soluciones distintas de 0 es preciso que el determinante de los coeficientes sea nulo:

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L - \sen \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sen \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

Desarrollando la expresión (2.40) obtenemos la ecuación (2.42):

$$(\sinh \beta L - \sen \beta L)(\sinh \beta L + \sen \beta L) - (\cosh \beta L - \cos \beta L)^2 = 0 \quad (2.41)$$

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1 \quad (2.42)$$

Las raíces de la ecuación (2.42) se obtienen mediante un método iterativo como el de Newton-Rhapson. Las mismas se muestran en la tabla 2.1:

| Soluciones | |
|------------|-------------------------|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 0 |
| $n = 2$ | 4,73004 |
| $n = 3$ | 7,8532 |
| $n = 4$ | 10,9956 |
| n | $\approx \pi (n - 1/2)$ |

Tabla 2.1: Soluciones de la ecuación (2.42)

En el caso de $n = 1$, $\beta_n L = 0$. Éste se corresponde a un modo de sólido rígido y por tanto su frecuencia es igual a 0.

A partir de las raíces de la tabla 2.1 obtenemos las frecuencias naturales del sistema, así como sus modos propios de vibración.

Para las frecuencias naturales partimos de la expresión (2.33) para llegar a:

$$\begin{aligned}
 w^2 &= \beta^4 c^2 = \beta^4 \frac{EI}{\rho A} \\
 w &= \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{rad/s}) \\
 f &= \frac{w}{2\pi} \\
 f_n &= \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz})
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Así, y a modo de ejemplo, las 4 primeras frecuencias naturales para una viga con ambos extremos libres tendrían los valores mostrados en la tabla 2.2:

| n | w_n | f_n |
|----------|--|--|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{22,373}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,373}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{61,673}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,673}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{120,903}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,903}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2.2: Primeras 4 frecuencias naturales de viga con extremos libres

La expresión de los modos de vibración será aplicable a las soluciones con la forma $\beta_n L > 0$.

Partiendo de la ecuación (2.38) y despejando la constante C_2 :

$$C_2 = C_1 \frac{-\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} \tag{2.44}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.36) y la ecuación (2.44) los modos propios de vibración tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 W(x) &= C_1(\sinh \beta x + \sin \beta x) + C_2(\cosh \beta x + \cos \beta x) = \\
 &= C_1 \left((\sinh \beta x + \sin \beta x) + \frac{\cos \beta L - \cosh \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} (\cosh \beta x + \cos \beta x) \right)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se procede a normalizar el modo propio con respecto a la masa de la viga:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \tag{2.46}$$

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \left(\sinh \beta x + \sin \beta x + \frac{\cos \beta L - \cosh \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} (\cosh \beta x + \cos \beta x) \right) \tag{2.47}$$

Viga en voladizo Se considera una viga en voladizo, con extremos empotrado y libre:

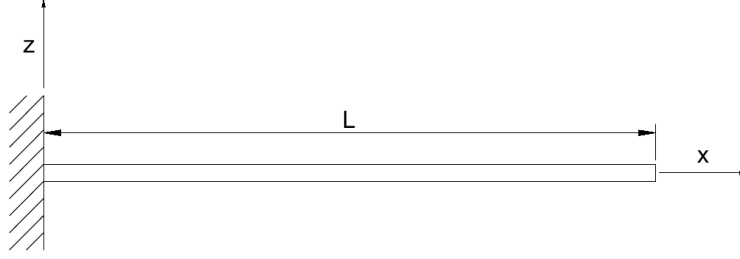


Figura 2.11: Viga en voladizo

Partiendo de la ecuación (2.25), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned}
 W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\
 \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\
 \frac{d^2W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\
 \frac{d^3W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sin \beta x
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Las condiciones de contorno de una viga en voladizo son las mostradas en las ecuaciones (2.49):

$$\begin{aligned}
 W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
 \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\
 \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = L) \\
 \left. \frac{d^3W}{dx^3} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Cortante nula en } x = L)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.49) en las de (2.48) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_4 &= -C_2 \\
 C_3 &= -C_1
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
 C_1(\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_2(\cos \beta L + \cosh \beta L) &= 0 \\
 C_1(\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_2(-\sin \beta L + \sinh \beta L) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Se expresan las ecuaciones (2.51) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sin \beta L + \sinh \beta L & \cos \beta L + \cosh \beta L \\ \cos \beta L + \cosh \beta L & -\sin \beta L + \sinh \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

El sistema de ecuaciones homogéneas (2.52) tendrá soluciones distintas de 0 siempre y cuando el determinante de los coeficientes sea igual a 0:

$$\begin{vmatrix} \sin \beta L + \sinh \beta L & \cos \beta L + \cosh \beta L \\ \cos \beta L + \cosh \beta L & -\sin \beta L + \sinh \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

Se desarrolla la expresión (2.53) para obtener la ecuación (2.54):

$$\cos \beta L \cosh \beta L = -1 \quad (2.54)$$

Las soluciones de la ecuación (2.54) se hallan mediante el método iterativo Newton-Rhapson. En la tabla 2.3 se muestran las mismas:

| Soluciones | |
|------------|-------------------------------|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 1,8751 |
| $n = 2$ | 4,69409 |
| $n \geq 3$ | $\approx \frac{(2n-1)\pi}{2}$ |

Tabla 2.3: Soluciones de la ecuación (2.54)

Siguiendo el mismo procedimiento de (2.43), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.55)$$

A modo de ejemplo, en la tabla 2.4 se muestran las primeras 4 frecuencias naturales de una viga en voladizo:

| n | f_n |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{3,5156}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,034}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,6973}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,9019}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2.4: Primeras 4 frecuencias naturales de viga en voladizo

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \quad (2.56)$$

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} \left(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \right) \quad (2.57)$$

Viga biempotrada Se considera una viga con extremos empotrados en la figura 2.12:

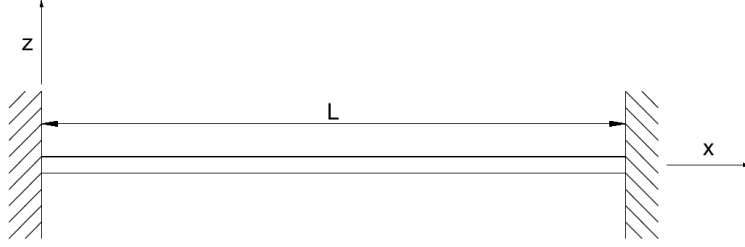


Figura 2.12: Viga biempotrada

Partiendo de la ecuación (2.25), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\ \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\ \frac{d^3 W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sin \beta x \end{aligned} \quad (2.58)$$

Las condiciones de contorno de una viga biempotrada son las mostradas a continuación:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\ \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\ W(L) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = L) \\ \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = L) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Se sustituyen las expresiones (2.59) en las ecuaciones (2.58) para obtener:

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_2 \\ C_3 &= -C_1 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} C_1(\sinh \beta L - \sin \beta L) + C_2(\cosh \beta L - \cos \beta L) &= 0 \\ C_1(\cosh \beta L - \cos \beta L) + C_2(\sinh \beta L + \sin \beta L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Se expresan las ecuaciones (2.61) de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Siendo la ecuación (2.62) un sistema de ecuaciones homogéneas, para encontrar una solución distinta de 0 el determinante de los coeficientes se iguala a 0:

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

Desarrollando la expresión (2.63), se obtiene:

$$\cos \beta_n L \cosh \beta_n L = 1 \quad (2.64)$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Raphson. Las soluciones a la ecuación (2.64) se muestran en la tabla 2.5:

| Soluciones | |
|------------|--|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 4,73004 |
| $n = 2$ | 7,85321 |
| $n = 3$ | 10,9956 |
| $n = 4$ | 14,13717 |
| $n = 5$ | 17,27876 |
| $n > 5$ | $\approx \pi \left(\frac{1}{2} + n \right)$ |

Tabla 2.5: Soluciones de la ecuación (2.64)

Siguiendo el mismo procedimiento de (2.43), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.65)$$

En la tabla 2.6 se muestran las primeras 5 frecuencias naturales de una viga biempotrada:

| n | f_n |
|---|--|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,37328}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,67291}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,90322}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{199,85958}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{298,55555}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2.6: Primeras 5 frecuencias naturales de viga biempotrada

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \quad (2.66)$$

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \left(\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \frac{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L}{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L} (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \right) \quad (2.67)$$

Viga con extremos empotrado y apoyado Se considera una viga con extremos empotrado y apoyado:

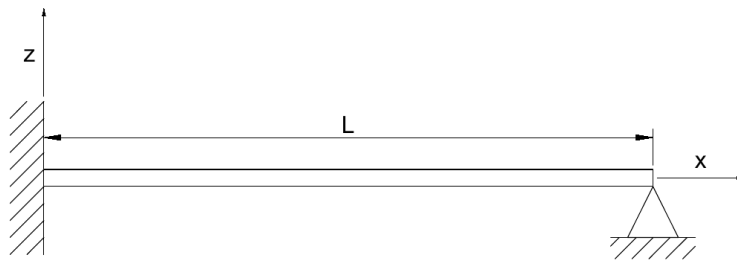


Figura 2.13: Viga con extremos empotrado y apoyado

Partiendo de la ecuación (2.25), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\ \frac{d^2W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \end{aligned} \quad (2.68)$$

Las condiciones de contorno de una viga con sus extremos empotrado y apoyado son las mostradas a continuación:

$$\begin{aligned}
 W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
 \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\
 W(L) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = L) \\
 \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = L)
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Se sustituyen las expresiones (2.69) en las ecuaciones (2.68) para obtener:

$$\begin{aligned}
 C_4 &= -C_2 \\
 C_3 &= -C_1
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
 C_1(\sinh \beta L - \sin \beta L) + C_2(\cosh \beta L - \cos \beta L) &= 0 \\
 C_1(\sinh \beta L + \sin \beta L) + C_2(\cosh \beta L + \cos \beta L) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

El sistema de ecuaciones (2.71) se puede expresar de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \sinh \beta L + \sin \beta L & \cosh \beta L + \cos \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

Las ecuaciones (2.72) componen un sistema de ecuaciones homogéneas. Para obtener una solución distinta de 0, es necesario que el determinante de los coeficientes sea igual a 0:

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \sinh \beta L + \sin \beta L & \cosh \beta L + \cos \beta L \end{vmatrix} = 0 \tag{2.73}$$

Desarrollando el determinante de la ecuación (2.73) se obtiene:

$$\tanh \beta L - \tan \beta L = 0 \tag{2.74}$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Rhapson. Las soluciones a la ecuación (2.74) se muestran en la tabla 2.7:

| Soluciones | |
|------------|--|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 3,9266 |
| $n = 2$ | 7,0686 |
| $n = 3$ | 10,2102 |
| $n = 4$ | 13,3518 |
| $n = 5$ | 16,4934 |
| $n > 5$ | $\approx \pi \left(n + \frac{1}{4} \right)$ |

Tabla 2.7: Soluciones de la ecuación (2.74)

Siguiendo el mismo procedimiento de (2.43), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.75)$$

En la tabla 2.8 se muestran las primeras 5 frecuencias naturales de una viga con extremos empotrado y apoyado:

| n | f_n |
|-----|--|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{15,41819}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{49,96511}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{104,24818}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{178,27056}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{272,03224}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2.8: Primeras 5 frecuencias naturales de viga con extremos empotrado y apoyado

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \quad (2.76)$$

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \left(\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \frac{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L} (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \right) \quad (2.77)$$

Viga biapoyada Se considera una viga con ambos extremos apoyados:

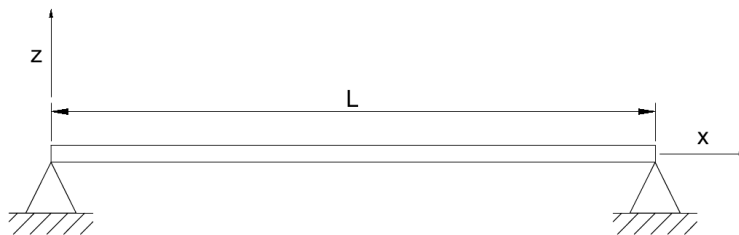


Figura 2.14: Viga biapoyada

Partiendo de la ecuación (2.25), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \end{aligned} \quad (2.78)$$

Las condiciones de contorno de una viga biapoyada se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 && \text{(Desplazamiento nulo en } x = 0) \\ \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 && \text{(Momento flector nulo en } x = 0) \\ W(L) &= 0 && \text{(Desplazamiento nulo en } x = L) \\ \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 && \text{(Momento flector nulo en } x = L) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Se sustituyen las expresiones (2.79) en las ecuaciones (2.78) para obtener:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} C_1 \sinh \beta L + C_3 \sin \beta L &= 0 \\ C_1 \sinh \beta L - C_3 \sin \beta L &= 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Se expresan las ecuaciones (2.81) de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sinh \beta L & \sin \beta L \\ \sinh \beta L & -\sin \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Siendo la ecuación (2.82) un sistema de ecuaciones homogéneas, para encontrar una solución distinta de 0 el determinante de los coeficientes se iguala a 0:

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L & \sin \beta L \\ \sinh \beta L & -\sin \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.83)$$

Desarrollando la expresión (2.83), se obtiene:

$$\sinh \beta L \sin \beta L = 0 \quad (2.84)$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Rhapson. Las soluciones a la ecuación (2.84) tienen la forma:

$$\beta_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.85)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de (2.43), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.86)$$

En la tabla 2.9 se muestran, a modo de ejemplo, las primeras 3 frecuencias naturales de una viga biapoyada:

| n | f_n |
|-----|---|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{9,8696}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{39,47842}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{88,82644}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2.9: Primeras 3 frecuencias naturales de una viga biapoyada

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \quad (2.87)$$

$$W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin \beta_n x \quad (2.88)$$

2.2.2. Vibración transversal de vigas continuas con masa puntual

En la sección 2.2.1 se han desarrollado las expresiones de las frecuencias naturales y modos propios de vibración de vigas continuas de sección constante según la teoría de Euler-Bernoulli.

En la presente sección se muestran las expresiones de las frecuencias naturales de vigas continuas de sección constante, bajo distintas condiciones de contorno, con masa puntual situada sobre ellas.

Se considera una viga continua de sección constante, como la de la figura 2.15, con masa puntual en $x = a$, donde x es la variable espacial a lo largo de la viga de longitud L .

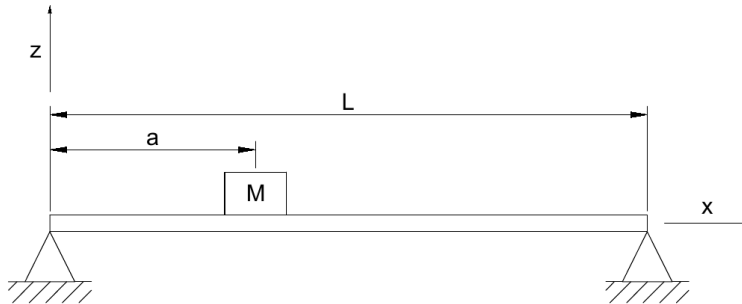


Figura 2.15: Viga con extremos apoyados con masa puntual

La figura 2.15 muestra una viga biapoyada a modo de ejemplo.

Las condiciones de contorno consideradas son las mismas que las tratadas en el apartado 2.2.1.

Se parte de la ecuación diferencial 2.25 desarrollada en la sección 2.2.1. Las soluciones para la ecuación 2.25 para el planteamiento que nos ocupa son las ecuaciones 2.89:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \sen \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \\ W_2(x) &= C_5 \sen \beta x + C_6 \cos \beta x + C_7 \sinh \beta x + C_8 \cosh \beta x \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son los desplazamientos transversales a la izquierda y derecha de la masa puntual M y $C_i (i = 1, \dots, 8)$ constantes a determinar.

Las condiciones de compatibilidad en la posición de la masa puntual, comunes a todas las condiciones de contorno, son las que se muestran en 2.90:

$$\begin{aligned} W_1(a) &= W_2(a) \\ \frac{dW_1(a)}{dx} &= \frac{dW_2(a)}{dx} \\ \frac{d^2W_1(a)}{dx^2} &= \frac{d^2W_2(a)}{dx^2} \\ \frac{d^3W_1(a)}{dx^3} - \frac{d^3W_2(a)}{dx^3} + \alpha \beta^4 W_1(a) &= 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

siendo $\alpha = \frac{M}{\rho AL}$.

Las condiciones de compatibilidad de 2.90 son comunes a todas las condiciones de contorno.

Viga con ambos extremos libres

Se considera una viga de sección continua con extremos libres y con una masa puntual situada sobre la misma, tal como indica la figura 2.16:

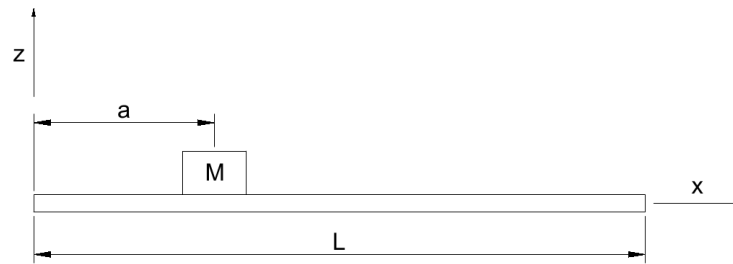


Figura 2.16: Viga con extremos libres con masa puntual

Las condiciones de contorno de una viga con extremos libres han sido discutidas en el apartado 2.2.1, siendo las correspondientes a las ecuaciones 2.35.

Teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad 2.90 y las de contorno 2.35, se sigue un proceso análogo al mostrado en la sección 2.2.1 para obtener la ecuación 2.91:

$$\begin{aligned}
 2(\cos \gamma_i \cosh \gamma_i - 1) + \alpha \gamma_i [& \cos \gamma_i \sinh \gamma_i \cos^2 \gamma_i \eta - \sinh \gamma_i \cosh \gamma_i \cosh^2 \gamma_i \eta \\
 & + \cos \gamma_i \cosh \gamma_i (\sinh \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta - \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 & + \cos \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 & - \sin \gamma_i \cosh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta + \sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 & + \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta + \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta) \\
 & + \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \sin \gamma_i \eta + \cosh \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 & + \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta] = 0
 \end{aligned} \quad (2.91)$$

siendo $\gamma_i = \beta_i L$ (i el modo propio i -ésimo) y $\eta = a/L$.

Resolviendo la ecuación 2.91 mediante un método iterativo, como el de Newton-Raphson, se obtienen los valores de β_i . Se sustituyen dichos valores en la expresión 2.92 para hallar las frecuencias naturales del sistema:

$$f_n = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.92)$$

Viga con extremos empotrado y libre

Se considera una viga de sección continua, con extremos empotrado y libre, con una masa puntual situada sobre la misma, tal como indica la figura 2.17:

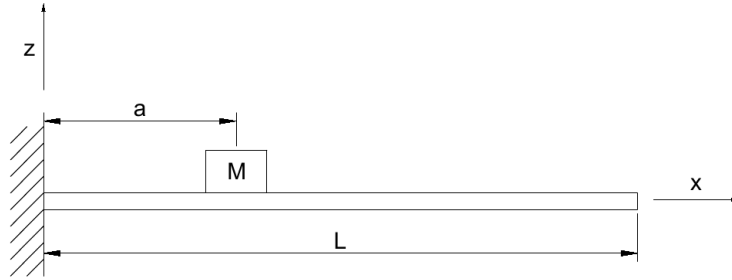


Figura 2.17: Viga en ménsula con masa puntual

Las condiciones de contorno de una viga con extremos empotrado y libre han sido discutidas en el apartado 2.2.1, siendo las correspondientes a las ecuaciones 2.49.

Teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad 2.90 y las de contorno 2.49, se sigue un proceso análogo al mostrado en la sección 2.2.1 para obtener la ecuación 2.93:

$$\begin{aligned}
 2(1 + \cos \gamma_i \cosh \gamma_i) + \alpha \gamma_i [& \cos \gamma_i \sinh \gamma_i \cos^2 \gamma_i \eta - \sinh \gamma_i \cosh \gamma_i \cosh^2 \gamma_i \eta \\
 & + \cos \gamma_i \cosh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta) \\
 & + \cos \gamma_i \sinh \gamma_i (\sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta - \cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta) \\
 & + \sin \gamma_i \cosh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta + \sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 & - \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta + \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta) \\
 & + \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\cosh \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta + \cos \gamma_i \eta \sin \gamma_i \eta) \\
 & + \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta] = 0
 \end{aligned} \quad (2.93)$$

donde $\gamma_i = \beta_i L$ (i el modo propio i -ésimo) y $\eta = a/L$.

Resolviendo la ecuación 2.93 mediante un método iterativo, como el de Newton-Raphson, se obtienen los valores de β_i . Se sustituyen dichos valores en la expresión 2.94 para hallar las frecuencias naturales del sistema:

$$f_n = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.94)$$

Viga biempotrada

Se considera una viga con extremos empotrados y con masa puntual situada sobre la misma, como la de la figura 2.18:

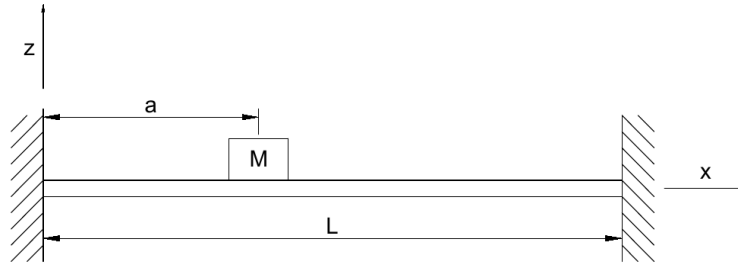


Figura 2.18: Viga con extremos empotrados con masa puntual

Las condiciones de contorno de una viga con extremos biempotrados han sido discutidas en el apartado 2.2.1, siendo las correspondientes a las ecuaciones 2.59.

Teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad 2.90 y las de contorno 2.59, se sigue un proceso análogo al mostrado en la sección 2.2.1 para obtener la ecuación 2.95:

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos \gamma_i \cosh \gamma_i) + \alpha \gamma_i [\sin \gamma_i \cosh \gamma_i \cosh^2 \gamma_i \eta - \cos \gamma_i \sinh \gamma_i \cos^2 \gamma_i \eta \\ + \cos \gamma_i \cosh \gamma_i (\sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta - \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\ + \cos \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\ - \sin \gamma_i \cosh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta + \sin \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\ + \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta + \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\ - \sin \gamma_i \sinh \gamma_i (\cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta + \cosh \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\ + \cos \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta - \sin \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta] = 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde $\gamma_i = \beta_i L$ (i el modo propio i -ésimo) y $\eta = a/L$.

Resolviendo la ecuación 2.95 mediante un método iterativo, como el de Newton-Raphson, se obtienen los valores de β_i . Se sustituyen dichos valores en la expresión 2.96 para hallar las frecuencias naturales del sistema:

$$f_n = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.96)$$

Viga con extremos empotrado y apoyado

Se considera una viga con extremos empotrado y apoyado, con masa puntual sobre la misma, como se muestra en la figura 2.19:

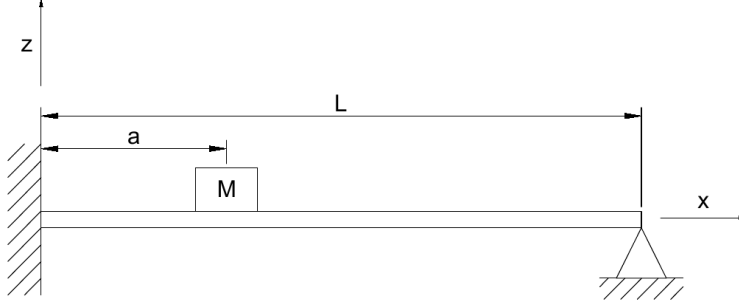


Figura 2.19: Viga con extremos empotrado y apoyado con masa puntual

Las condiciones de contorno de una viga con extremos empotrado y apoyado han sido discutidas en el apartado 2.2.1, siendo las correspondientes a las ecuaciones 2.69.

Teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad 2.90 y las de contorno 2.69, se sigue un proceso análogo al mostrado en la sección 2.2.1 para obtener la ecuación 2.97:

$$\begin{aligned}
 2(\cos \gamma_i \sinh \gamma_i - \sen \gamma_i \cosh \gamma_i) + \alpha \gamma_i [\cos^2 \gamma_i \eta (\cos \gamma_i \cosh \gamma_i - \sen \gamma_i \sinh \gamma_i) \\
 - \cosh^2 \gamma_i \eta (\cos \gamma_i \cosh \gamma_i + \sen \gamma_i \sinh \gamma_i) \\
 + (\cos \gamma_i \sinh \gamma_i + \sen \gamma_i \cosh \gamma_i)(\cos \gamma_i \eta \sen \gamma_i \eta \\
 + \cosh \gamma_i \eta \sinh \gamma_i \eta) \\
 + 2(\cos \gamma_i \sen \gamma_i \eta - \sen \gamma_i \cos \gamma_i \eta)(\cosh \gamma_i \sinh \gamma_i \eta \\
 - \sinh \gamma_i \eta \cosh \gamma_i \eta)] = 0
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

donde $\gamma_i = \beta_i L$ (i el modo propio i -ésimo) y $\eta = a/L$.

Resolviendo la ecuación 2.97 mediante un método iterativo, como el de Newton-Raphson, se obtienen los valores de β_i . Se sustituyen dichos valores en la expresión 2.98 para hallar las frecuencias naturales del sistema:

$$f_n = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \tag{2.98}$$

Viga biapoyada

Se considera una viga con ambos extremos apoyados y con una masa puntual situada sobre la misma en la figura 2.20:

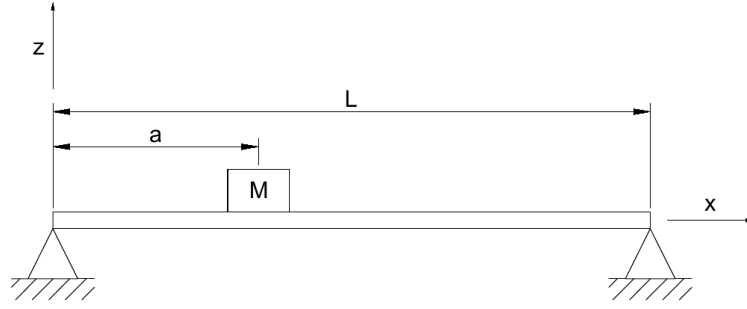


Figura 2.20: Viga con extremos apoyados con masa puntual

Las condiciones de contorno de una viga con extremos biapoyados han sido discutidas en el apartado 2.2.1, siendo las correspondientes a las ecuaciones 2.79.

Teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad 2.90 y las de contorno 2.79, se sigue un proceso análogo al mostrado en la sección 2.2.1 para obtener la ecuación 2.99:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{sen} \gamma_i \operatorname{senh} \gamma_i + \alpha \gamma_i [& \operatorname{sen} \gamma_i \operatorname{senh} \gamma_i (\cosh \gamma_i \eta \operatorname{senh} \gamma_i \eta \\
 & - \cos \gamma_i \eta \operatorname{sen} \gamma_i \eta) \\
 & + \cos \gamma_i \operatorname{senh} \gamma_i \operatorname{sen}^2 \gamma_i \eta \\
 & - \operatorname{sen} \gamma_i \cosh \gamma_i \operatorname{senh}^2 \gamma_i \eta] = 0
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

donde $\gamma_i = \beta_i L$ (i el modo propio i -ésimo) y $\eta = a/L$.

Resolviendo la ecuación 2.99 mediante un método iterativo, como el de Newton-Raphson, se obtienen los valores de β_i . Se sustituyen dichos valores en la expresión 2.100 para hallar las frecuencias naturales del sistema:

$$f_n = \frac{\beta_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \tag{2.100}$$

2.3. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es un método numérico empleado para hallar soluciones precisas de problemas mecánicos y estructurales. El método se fundamenta en reemplazar la estructura objeto de estudio por elementos más pequeños que se comportan como miembros estructurales continuos, llamados elementos finitos. Los elementos finitos se interconectan unos con otros en ciertos puntos llamados nodos. Hallar el comportamiento de un sistema bajo la acción de unas cargas determinadas (por ejemplo, desplazamientos) de forma exacta es muy complicado. Por ello, el comportamiento de cada elemento finito se halla de forma aproximada.

La idea detrás del método de elementos finitos es que las soluciones de cada elemento, elegidas convenientemente, puede converger a la solución exacta del sistema completo, conforme se reduce el tamaño del elemento finito. En los nodos hay equilibrio de fuerzas y entre los elementos finitos compatibilidad de desplazamientos. Ello permite que el sistema se comporte de forma unitaria.

2.3.1. Ecuaciones de movimiento de un elemento

En la figura 2.21 se muestra el modelo de elementos finitos de la estructura de una fresadora. En este modelo las columnas y el sobrebrazo están representados por elementos de placa triangulares y el cursor transversal y el portaherramientas por elementos viga.

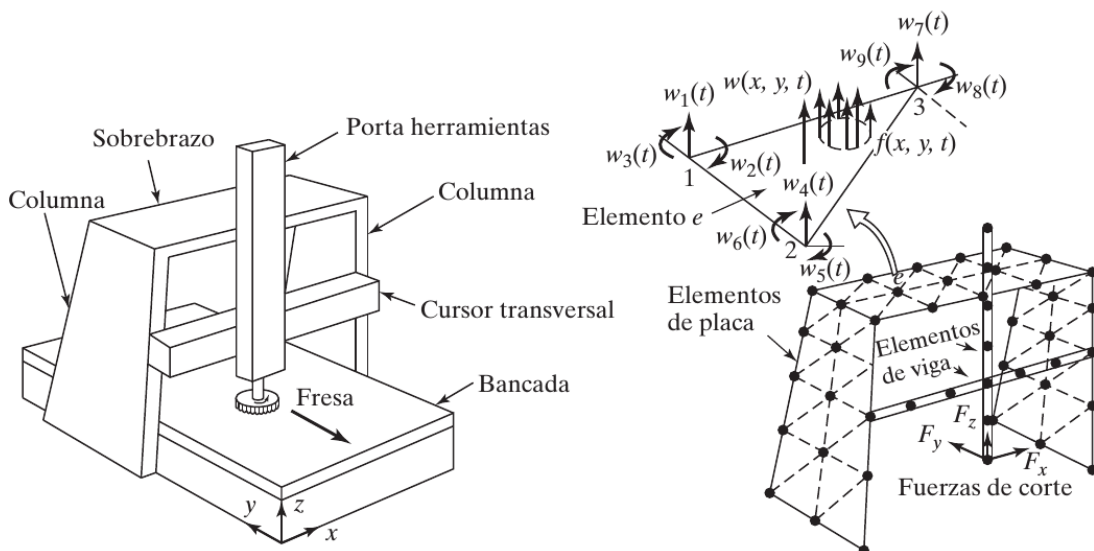


Figura 2.21: Modelado de elementos finitos

Los elementos están conectados entre sí por los nodos. El desplazamiento de un elemento se expresa en función de los desplazamientos de los nodos del elemento. En la figura 2.21 el desplazamiento transversal de un elemento se expresa como $w(x, y, t)$. Los valores de w , $\partial w / \partial x$ y $\partial w / \partial y$ de los nodos 1, 2 y 3 son incógnitas y se denominan $w_1(t), w_2(t), w_3(t), \dots, w_9(t)$. El desplazamiento $w(x, y, t)$ se expresa en función de los desplazamientos $w_i(t)$ como:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_i(t) \quad (2.101)$$

donde $N_i(x, y)$ es la función de forma correspondiente al desplazamiento del nodo $w_i(t)$ y n el número de nodos del elemento ($n = 9$ en la figura 2.21). Si una fuerza distribuida $f(x, y, t)$ actúa sobre un elemento, la misma se puede distribuir en fuerzas $f_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, 9$), correspondientes a cada nodo. Si actuaran fuerzas puntuales en los nodos, se añadirían a la fuerza $f_i(t)$ correspondiente.

Se procede a obtener la ecuación del movimiento para determinar los desplazamientos de $w_i(t)$ bajo la acción de las fuerzas $f_i(t)$. Partiendo de la ecuación 2.101, la energía cinética T y la potencial V de un elemento se expresan como:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{W}}^T [m] \dot{\vec{W}} \quad (2.102)$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{W}^T [k] \vec{W} \quad (2.103)$$

donde:

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ \vdots \\ dw_n/dt \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

$[m]$ y $[k]$ son las matrices de masa y rigidez del elemento.

Siendo las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.105)$$

Se sustituyen las ecuaciones (2.102) y (2.103) en las ecuaciones de Lagrange (2.105), obteniendo las ecuaciones de movimiento del elemento finito:

$$[m] \ddot{\vec{W}} + [k] \vec{W} = \vec{f} \quad (2.106)$$

donde \vec{f} es el vector de fuerzas nodales y $\ddot{\vec{W}}$ el vector de aceleraciones nodales dado por:

$$\ddot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1(t) \\ \ddot{w}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{w}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d^2w_1/dt^2 \\ d^2w_2/dt^2 \\ \vdots \\ d^2w_n/dt^2 \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

2.3.2. Matriz de masa, matriz de rigidez y vector fuerza de un elemento viga

Se considera un elemento viga regido por la teoría de Euler-Bernoulli. La figura 2.22 muestra una viga uniforme sujeta a una fuerza distribuida transversal $f(x, t)$:

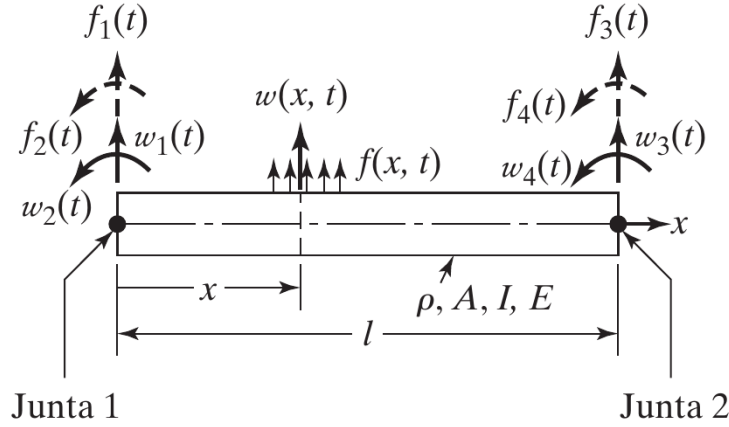


Figura 2.22: Elemento finito de una viga

Las juntas o nodos están sometidas a un desplazamiento traslacional y a otro rotacional. Los desplazamientos se designan por $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ y $w_4(t)$. Las fuerzas nodales $f_1(t)$ y $f_3(t)$ se corresponden a los desplazamientos nodales lineales $w_1(t)$ y $w_3(t)$, y las fuerzas nodales rotacionales (momentos flectores) $f_2(t)$ y $f_4(t)$ se corresponden con los desplazamientos nodales rotacionales $w_2(t)$ y $w_4(t)$, respectivamente. Se supone que el desplazamiento transversal en el elemento es una ecuación cúbica en x :

$$w(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3 \quad (2.108)$$

Los desplazamientos nodales han de cumplir las condiciones:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_1(t), & \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) &= w_2(t) \\ w(l, t) &= w_3(t), & \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) &= w_4(t) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Sustituyendo las condiciones (2.109) en la ecuación del movimiento (2.108) se obtiene:

$$\begin{aligned} a(t) &= w_1(t) \\ b(t) &= w_2(t) \\ c(t) &= \frac{1}{l^2}(-3w_1(t) - 2w_2(t)l + 3w_3(t) - w_4(t)l) \\ d(t) &= \frac{1}{l^3}(2w_1(t) + w_2(t)l - 2w_3(t) + w_4(t)l) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación (2.108) las ecuaciones (2.110) resulta:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) w_1(t) + \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) lw_2(t) + \\ &+ \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right) w_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) lw_4(t) \end{aligned} \quad (2.111)$$

La ecuación (2.111) se puede expresar de la siguiente forma:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x) w_i(t) \quad (2.112)$$

donde $N_i(x)$ son las funciones de forma dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2(x) &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \end{aligned} \quad (2.113)$$

La energía cinética, la energía potencial de flexión y el trabajo virtual del elemento se expresan como:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \equiv \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}(t)^T [m] \dot{\vec{w}}(t) \\ V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \equiv \frac{1}{2} \vec{w}(t)^T [k] \vec{w}(t) \\ \delta W(t) &= \int_0^l f(x, t) \delta w(x, t) dx \equiv \delta \vec{w}(t)^T \vec{f}(t) \end{aligned} \quad (2.114)$$

donde ρ es la densidad de la viga, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y , A es el área de la sección transversal y:

$$\begin{aligned} \vec{w}(t) &= \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{Bmatrix}, & \dot{\vec{w}}(t) &= \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \\ dw_4/dt \end{Bmatrix} \\ \delta \vec{w}(t) &= \begin{Bmatrix} \delta w_1(t) \\ \delta w_2(t) \\ \delta w_3(t) \\ \delta w_4(t) \end{Bmatrix}, & \vec{f}(t) &= \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Sustituyendo la ecuación (2.111) en las ecuaciones de (2.114) y operando, las matrices de masa, rigidez y fuerzas del elemento finito son:

$$[m] = \frac{\rho A l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

$$f_i(t) = \int_0^l f(x, t) N_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.118)$$

2.3.3. Ecuaciones de movimiento del sistema de elementos finitos

Debido a que la estructura completa es la unión de los elementos finitos, se procede a extender las ecuaciones de movimiento de un elemento finito en el sistema global de coordenadas a toda la estructura.

En el caso que nos ocupa, las matrices de masa, rigidez y fuerza locales coinciden con las matrices en ejes globales, ya que ejes locales y globales, a su vez, coinciden.

Los desplazamientos nodales de la estructura completa en ejes globales son $U_1(t)$, $U_2(t)$, \dots , $U_M(t)$. Expresados de forma matricial:

$$\vec{\tilde{U}}(t) = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_M(t) \end{Bmatrix} \quad (2.119)$$

Se designará con el superíndice (e) aquellos valores correspondientes a un elemento finito en particular. Por tanto, siendo $\vec{U}^{(e)}(t)$ el vector de desplazamientos de un elemento finito, el mismo y $\vec{\tilde{U}}(t)$ se relacionan de la siguiente forma:

$$\vec{U}^{(e)}(t) = [A^{(e)}] \vec{\tilde{U}}(t) \quad (2.120)$$

donde $[A^{(e)}]$ es una matriz rectangular compuesta de ceros y unos.

La energía cinética de la estructura completa se obtiene añadiendo las energías cinéticas de cada elemento finito:

$$T = \sum_{e=1}^E \frac{1}{2} \dot{\vec{U}}^{(e)T} [\bar{m}] \dot{\vec{U}}^{(e)} \quad (2.121)$$

donde E representa el número de elementos finitos en el ensamblaje. Derivando la ecuación (2.120) la relación entre los vectores de velocidad es:

$$\dot{\vec{U}}^{(e)}(t) = [A^{(e)}] \dot{\vec{\tilde{U}}}(t) \quad (2.122)$$

Sustituyendo (2.122) en (2.121) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \dot{\vec{\tilde{U}}}^T [A^{(e)}]^T [\bar{m}^{(e)}] [A^{(e)}] \dot{\vec{\tilde{U}}} \quad (2.123)$$

La energía cinética del sistema completo también puede expresarse en función de las velocidades de los nodos de la estructura completa $\dot{\vec{\tilde{U}}}$:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\tilde{U}}}^T [\tilde{M}] \dot{\vec{\tilde{U}}} \quad (2.124)$$

donde $[\tilde{M}]$ es la matriz de masa de la estructura completa. Comparando las ecuaciones (2.123) y (2.124) se obtiene:

$$[\tilde{M}] = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T [\tilde{m}^{(e)}] [A^{(e)}] \quad (2.125)$$

De forma análoga, considerando la energía potencial, la matriz de rigidez de la estructura completa, $[\tilde{K}]$, es:

$$[\tilde{K}] = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T [\tilde{k}^{(e)}] [A^{(e)}] \quad (2.126)$$

Teniendo en cuenta el trabajo virtual, se obtiene el vector de fuerzas nodales de la estructura completa, $\vec{\tilde{F}}$:

$$\vec{\tilde{F}} = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T \vec{f}^{(e)} \quad (2.127)$$

Una vez halladas las matrices de masa, rigidez y de fuerza del sistema completo, las ecuaciones de Lagrange para la estructura completa son:

$$[\tilde{M}] \ddot{\vec{\tilde{U}}} + [\tilde{K}] \vec{\tilde{U}} = \vec{\tilde{F}} \quad (2.128)$$

El vector $\vec{\tilde{F}}$ se ha obtenido teniendo en cuenta las cargas distribuidas en cada elemento. En caso de existir cargas puntuales aplicadas en un nodo, dicha carga debe ser añadida al nodo correspondiente.

2.3.4. Incorporación de las condiciones de contorno

En la obtención de las ecuaciones del movimiento de la estructura completa no se ha considerado ninguna restricción en los grados de libertad. Normalmente una estructura presenta alguna forma de sujeción que conlleva que los desplazamientos sean cero en algunos nodos para evitar el movimiento de sólido rígido de la estructura. Una forma simple de incorporar condiciones de desplazamiento nulo consiste en eliminar las correspondientes filas y columnas de las matrices $[\tilde{M}]$, $[\tilde{K}]$ y $\vec{\tilde{F}}$.

Las ecuaciones de movimiento de la estructura coaccionada se expresan como:

$$[\tilde{M}]_{N \times N} \ddot{\vec{\tilde{X}}}_{N \times 1} + [\tilde{K}]_{N \times N} \vec{\tilde{X}}_{N \times 1} = \vec{\tilde{F}}_{N \times 1} \quad (2.129)$$

donde N es el número de desplazamientos nodales libres de la estructura.

2.3.5. Frecuencias naturales y modos propios de vibración

El caso estudiado en el presente proyecto es aquél que corresponde a un movimiento libre no amortiguado, por lo que el término $\vec{\tilde{F}}$ de la ecuación (2.129) se anula:

$$[\tilde{M}]_{N \times N} \ddot{\vec{\tilde{X}}}_{N \times 1} + [\tilde{K}]_{N \times N} \vec{\tilde{X}}_{N \times 1} = \vec{0} \quad (2.130)$$

Con el objetivo de mejorar la legibilidad hacemos $[\tilde{M}] = [m]$ y $[\tilde{K}] = [k]$.

Se propone una solución a la ecuación (2.130) de la forma

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.131)$$

donde X_i es una constante y T depende del tiempo. La ecuación (2.131) muestra que la relación de las amplitudes de 2 coordenadas

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} \quad (2.132)$$

no depende del tiempo. Esto, en la práctica, implica que todas las coordenadas tienen movimientos síncronos. La configuración del sistema no varía de forma durante el movimiento, pero sí lo hace la amplitud. La configuración del sistema, que viene dada por el vector

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (2.133)$$

se denomina modo propio del sistema.

Sustituyendo (2.131) en (2.130) se obtiene:

$$[m]\vec{X}\ddot{T}(t) + [k]\vec{X}T(t) = \vec{0} \quad (2.134)$$

La ecuación (2.134) puede expresarse de forma escalar en n ecuaciones independientes

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.135)$$

de las que se obtienen las relaciones

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.136)$$

Como el miembro izquierdo de la ecuación (2.136) es independiente del índice i , y a su vez el derecho lo es de t , ambos miembros han de ser iguales a una constante. Se considera dicha constante como w^2 en la ecuación:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + w^2 T(t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - w^2 m_{ij}) X_j &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$[[k] - w^2[m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (2.138)$$

La solución a la ecuación (2.137) puede expresarse como:

$$T(t) = C_1 \cos(wt + \phi) \quad (2.139)$$

donde C_1 y ϕ son constantes, la amplitud y el desfase, respectivamente.

La ecuación (2.139) muestra que todas las coordenadas pueden realizar un movimiento armónico con la misma frecuencia w y ángulo de desfase ϕ . La frecuencia de w no puede tomar cualquier valor, ha de satisfacer la ecuación (2.138). Dicha ecuación representa n ecuaciones homogéneas con incógnitas $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Para obtener una solución no trivial distinta de 0, el determinante Δ de la matriz de coeficientes ha de ser nulo:

$$\Delta = |k_{ij} - w^2 m_{ij}| = |[k] - w^2 [m]| = 0 \quad (2.140)$$

La ecuación (2.138) se conoce como la del problema de autovalores y autovectores.

La ecuación (2.140) es la ecuación característica, w^2 es el autovalor y w es la frecuencia angular natural del sistema.

Al desarrollar la ecuación (2.140) se obtiene una ecuación polinómica de orden n en w^2 . La solución de esta ecuación proporciona n valores de w^2 . Los valores de las soluciones son reales y positivos cuando las matrices $[k]$ y $[m]$ son simétricas y positivas definidas, como es el caso. Si $w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2$ constituyen las n soluciones en orden de magnitud ascendente, sus raíces cuadradas positivas proporcionan las n frecuencias angulares naturales del sistema, tal que $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$. El valor w_1 se denomina frecuencia fundamental.

La ecuación (2.138) puede expresarse como:

$$[\lambda[k] - [m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (2.141)$$

donde:

$$\lambda = \frac{1}{w^2} \quad (2.142)$$

Multiplicando por $[k]^{-1}$ se obtiene:

$$[\lambda[I] - [D]] \vec{X} = \vec{0} \quad (2.143)$$

$$\lambda[I] \vec{X} = [D] \vec{X} \quad (2.144)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad y

$$[D] = [k]^{-1}[m] \quad (2.145)$$

es la matriz dinámica. La ecuación (2.144) representa el problema estándar de autovalores. Para obtener una solución no trivial se iguala el determinante característico a 0:

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0 \quad (2.146)$$

Se procede a resolver la ecuación (2.146) obteniendo la ecuación característica.

Ortogonalidad de los modos propios

Los modos propios obtenidos a partir de la ecuación (2.144) son ortogonales entre ellos. Una frecuencia w_i y su correspondiente modo propio $\vec{X}^{(i)}$ cumplen la ecuación (2.138), por lo que:

$$w_i^2[m]\vec{X}^{(i)} = [k]\vec{X}^{(i)} \quad (2.147)$$

Se considera otra frecuencia w_j , con su modo propio $\vec{X}^{(j)}$, que a su vez:

$$w_j^2[m]\vec{X}^{(j)} = [k]\vec{X}^{(j)} \quad (2.148)$$

Multiplicamos las ecuaciones (2.148) y (2.147) por $\vec{X}^{(j)T}$ y $\vec{X}^{(i)T}$ respectivamente, y teniendo en cuenta la simetría de las matrices $[k]$ y $[m]$ se obtiene:

$$w_i^2\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(j)T}[k]\vec{X}^{(i)} \equiv \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} \quad (2.149)$$

$$w_j^2\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(j)} \equiv w_j^2\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(j)} \quad (2.150)$$

Se sustrae (2.150) de (2.149):

$$(w_i^2 - w_j^2)\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 0 \quad (2.151)$$

Por regla general $w_i^2 \neq w_j^2$. Por lo que la ecuación (2.151) es igual a:

$$\vec{X}^{(j)T}[m]\vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (2.152)$$

De las ecuaciones (2.149) y (2.150), y comparando con la ecuación (2.152), se obtiene:

$$\vec{X}^{(j)T}[k]\vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (2.153)$$

Las ecuaciones (2.152) y (2.153) muestran que los vectores propios $\vec{X}^{(i)}$ y $\vec{X}^{(j)}$ son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez.

Cuando $i = j$, los miembros de la izquierda de las ecuaciones (2.152) y (2.153) no son iguales a 0, y proporcionan los coeficientes de masa y rigidez generalizados del modo i -ésimo:

$$M_{ii} = \vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.154)$$

$$K_{ii} = \vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.155)$$

Las ecuaciones (2.154) y (2.155) se expresan en forma matricial como:

$$[\curvearrowleft M \curvearrowright] = \begin{pmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{pmatrix} = [X]^T[m][X] \quad (2.156)$$

$$[\nearrow K \searrow] = \begin{pmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{pmatrix} = [X]^T [k] [X] \quad (2.157)$$

donde $[X]$ se denomina matriz modal, en la que la columna i -ésima se corresponde con el vector propio i -ésimo:

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \dots \vec{X}^{(n)}] \quad (2.158)$$

Los modos propios se normalizan de modo que $[\nearrow M \searrow] = [I]$:

$$\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.159)$$

En este caso la matriz $[\nearrow K \searrow]$ se reduce a:

$$[\nearrow K \searrow] = [\nearrow w_i^2 \searrow] = \begin{pmatrix} w_1^2 & & & 0 \\ & w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.160)$$

Un modo propio que satisface la ecuación (2.159) se dice que está ortonormalizado con respecto a la matriz de masa $[m]$.

2.4. Matlab

La herramienta empleada en la elaboración del programa objeto del presente documento ha sido Matlab (abreviatura de *Matrix Laboratory*). Matlab es un programa de cálculo numérico, desarrollado por la empresa Mathworks, especialmente indicado para cálculo matricial, que debido a su sencillez, simplicidad de uso y amplia biblioteca de funciones matemáticas, es muy usado en ingeniería.

El lenguaje de programación implementado en Matlab se denomina M. Es un lenguaje interpretado (no requiere el flujo de trabajo basado en compilación y ejecución del código) y dinámico (a la hora de emplear una variable no es necesario declarar su tipo). Ya que está diseñado orientado al cálculo matricial, cualquier operación matricial realizada en este lenguaje se ejecutará más eficientemente. Por otro lado, todo lo anterior redundará en una velocidad de ejecución del código inferior a otros lenguajes de programación como C, C++ o Java.

Matlab proporciona una interfaz de usuario para su manejo. Se procede a continuación a describir los componentes básicos de la misma.

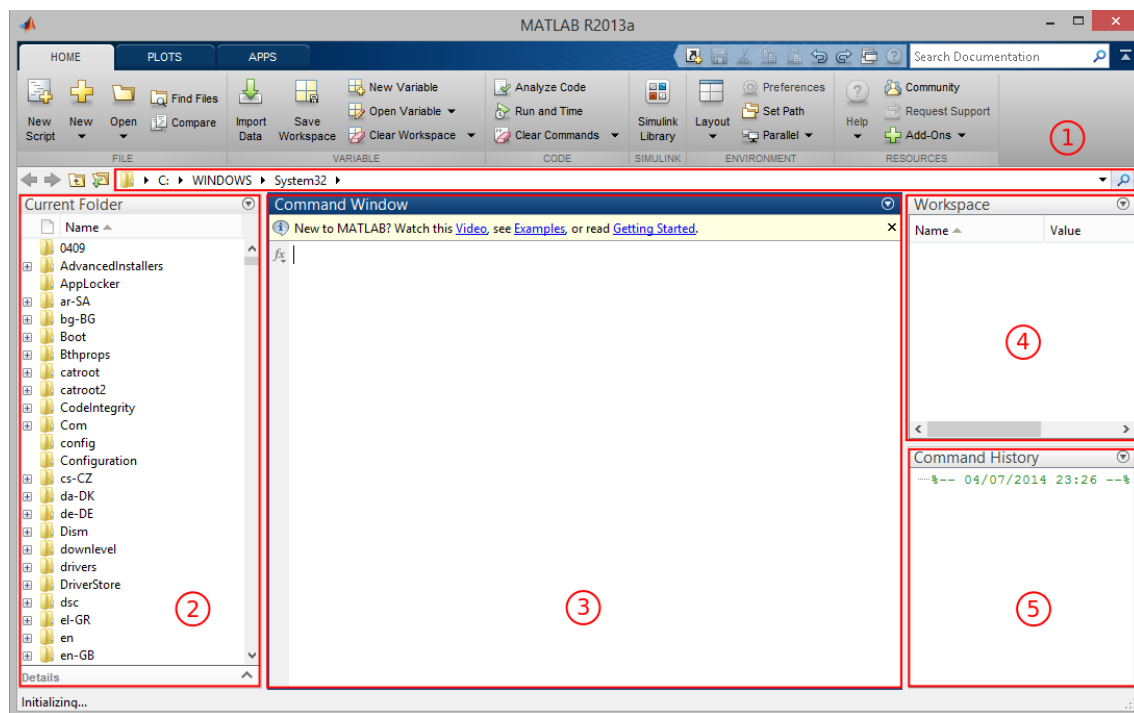


Figura 2.23: Ventana de inicio de Matlab

Los componentes numerados de la imagen 2.23 son:

1. Carpeta actual. Localización donde Matlab ha sido ejecutado. A la hora de ejecutar código, Matlab buscará las funciones invocadas en la presente ruta y en las que estén definidas en la variable “Path”.
2. Navegador de archivos. Muestra el contenido de la carpeta actual.
3. Ventana de comandos. Ventana en la que se introducen las órdenes a ejecutar en Matlab.

4. Área de trabajo. Es un registro de las variables almacenadas en memoria introducidas en la ventana de comandos.
5. Historial de comandos. Registro de las órdenes introducidas en Matlab.

Asimismo, Matlab proporciona un editor que permite la codificación de scripts o programas para agruparlos en archivos con extensión *.m, evitando de esta forma la introducción reiterada de órdenes en la ventana de comandos con el consiguiente ahorro de tiempo. El mismo se muestra en la figura 2.24:

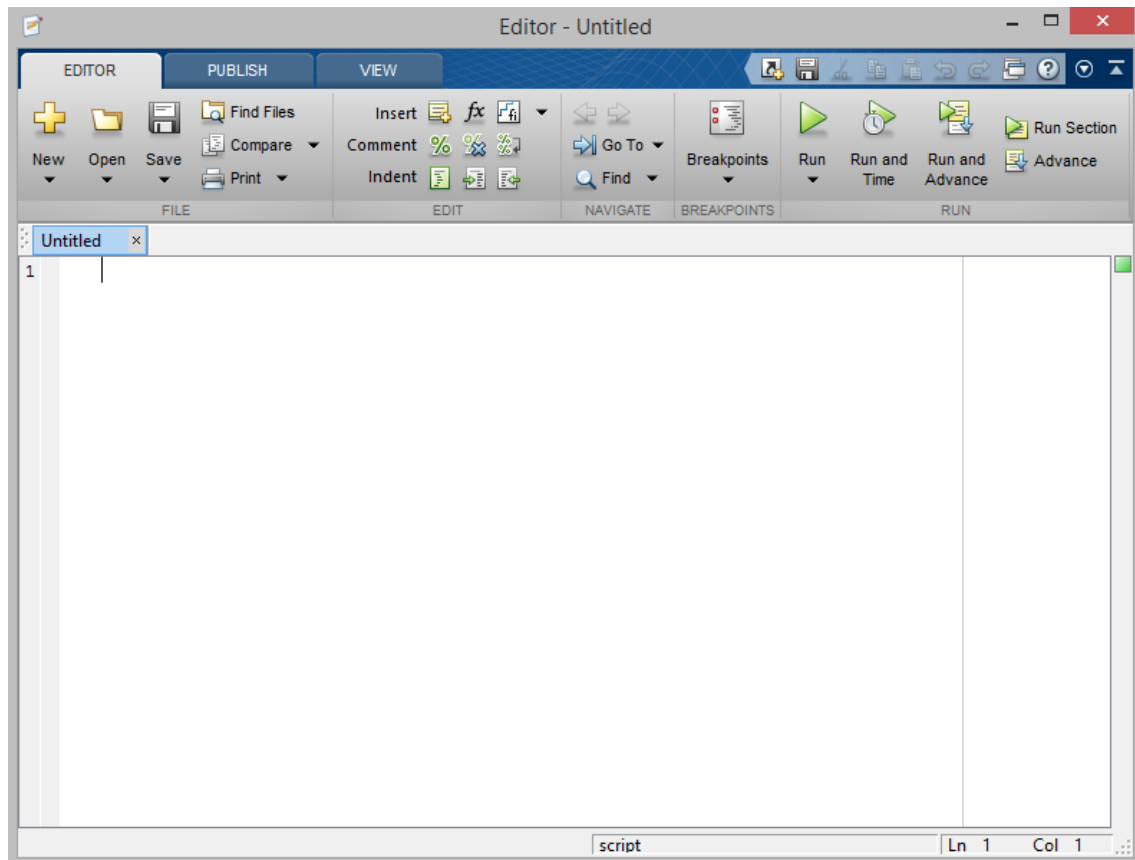


Figura 2.24: Editor de Matlab

2.4.1. Guide

Para la realización de la interfaz gráfica se ha empleado Guide. Guide es una herramienta que permite la realización y codificación de interfaces gráficas sencillas de forma fácil e intuitiva dentro de Matlab. Por un lado, su uso no está recomendado para realizar trabajos complejos, ya que otras herramientas como C++, C# o Java son más capaces de ello, pero para el caso que nos ocupa es una solución óptima.

El programa se ejecuta llamándolo desde la ventana de comandos de Matlab de la forma siguiente:

```
>> guide
```

Para a continuación mostrar un asistente (2.25) que facilita el inicio en la creación de interfaces gráficas:

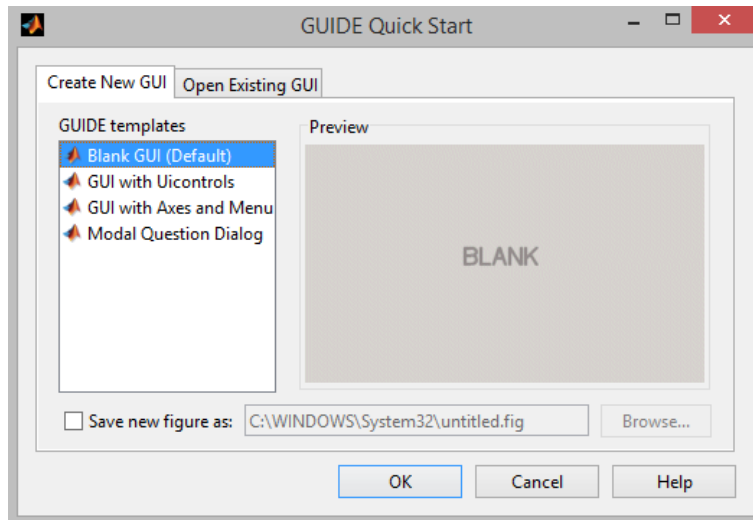


Figura 2.25: Asistente de creación de interfaces gráficas para Guide

Se selecciona “Blank GUI (Default)” para obtener una plantilla sin contenido, en la que el usuario sitúa los distintos elementos de la interfaz:

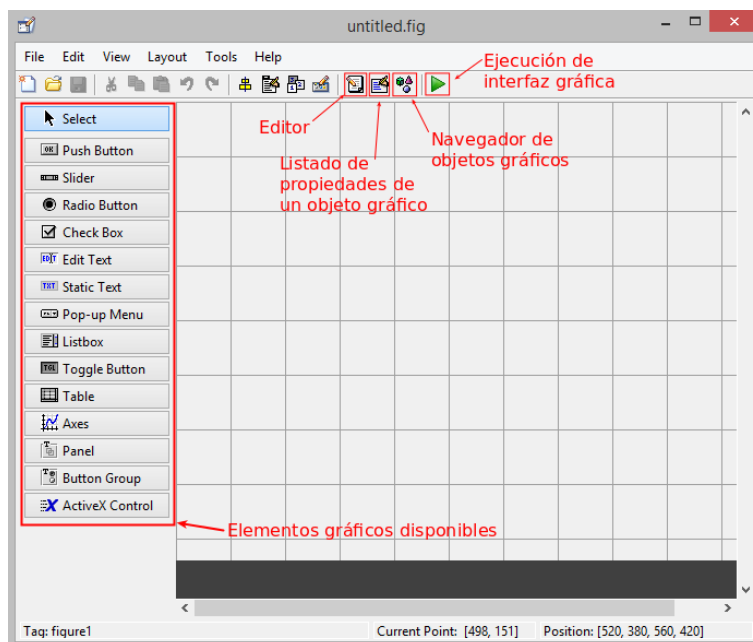


Figura 2.26: Herramienta Guide - Plantilla sin contenido

En la figura 2.26 se observan los principales elementos de la herramienta:

- Elementos gráficos disponibles
- Editor
- Listado de propiedades de objetos gráficos
- Navegador de objetos gráficos
- Ejecución de interfaz gráfica

Los elementos gráficos básicos de los que dispone Guide son:

- Botón: permite lanzar una acción concreta en el momento de ser pulsado.
- Control deslizante: proporciona un valor determinado comprendido entre un mínimo y un máximo mediante un botón deslizante.
- Botón de radio: casilla que permite la selección de una opción siendo la misma excluyente del resto.
- Casilla de verificación: permite la selección de una opción sin ser excluyente.
- Texto editable: marco de texto editable.
- Texto estático: marco de texto no editable.
- Menú despegable: seleccionador que permite elegir entre distintas opciones recogidas en un menú.
- Lista: seleccionador que permite elegir entre distintas opciones mostradas en una lista.
- Botón habilitador: botón de pulsación que alterna entre dos estados (0 y 1).
- Tabla: muestra datos organizados en una tabla.
- Ejes: ordenada y abscisa que permiten representar funciones, así como imágenes.
- Marco: elemento gráfico que permite agrupar distintos elementos dentro de sí.
- Marco con botones radio: construcción predefinida que agrupa el elemento marco con botones de radio.

Una vez seleccionados y colocados los elementos en la plantilla, sus propiedades pueden ser accedidas mediante el “Property Inspector” o listado de propiedades. Este listado permite mostrar las diferentes propiedades de cada objeto gráfico, así como su modificación. Las propiedades de un objeto gráfico están almacenadas en una estructura llamada *handles*, mediante su identificador *Tag*. De esta forma, para poder acceder a las propiedades de un objeto (por ejemplo, el objeto de la figura 2.27), se haría mediante:

```
handles.edit1 --> [estructura handles].[Tag]
```

A continuación se muestra el listado de propiedades correspondiente a un texto dinámico:

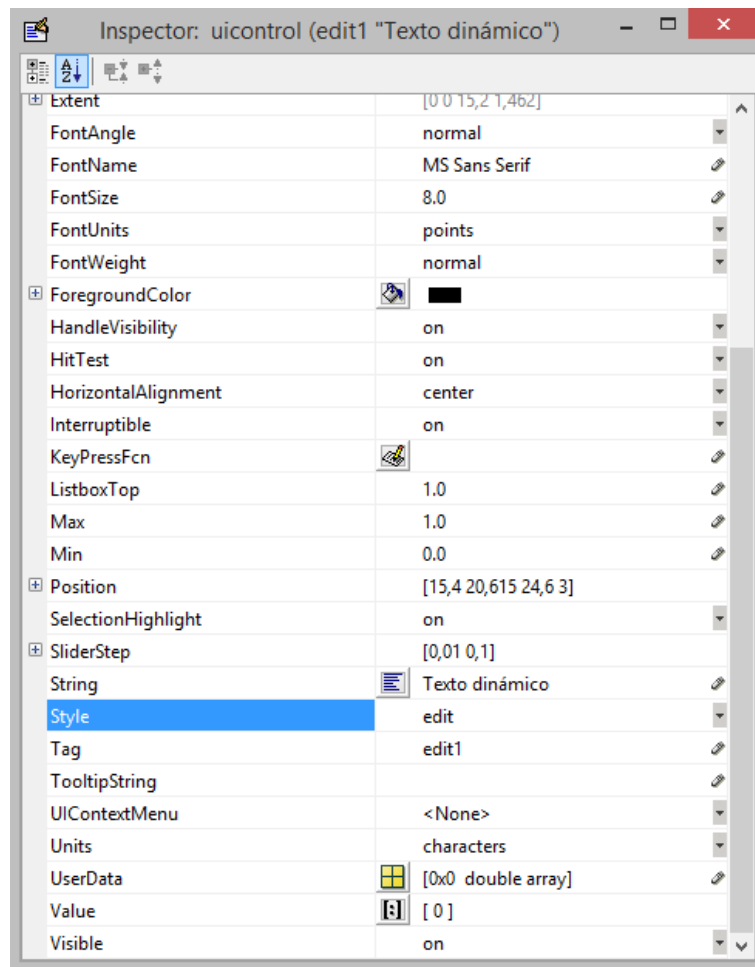


Figura 2.27: Listado de propiedades de un texto dinámico

La interfaz es guardada en un archivo con extensión *.fig. La lógica del programa se guarda en un archivo con extensión *.m con el mismo nombre de la interfaz.

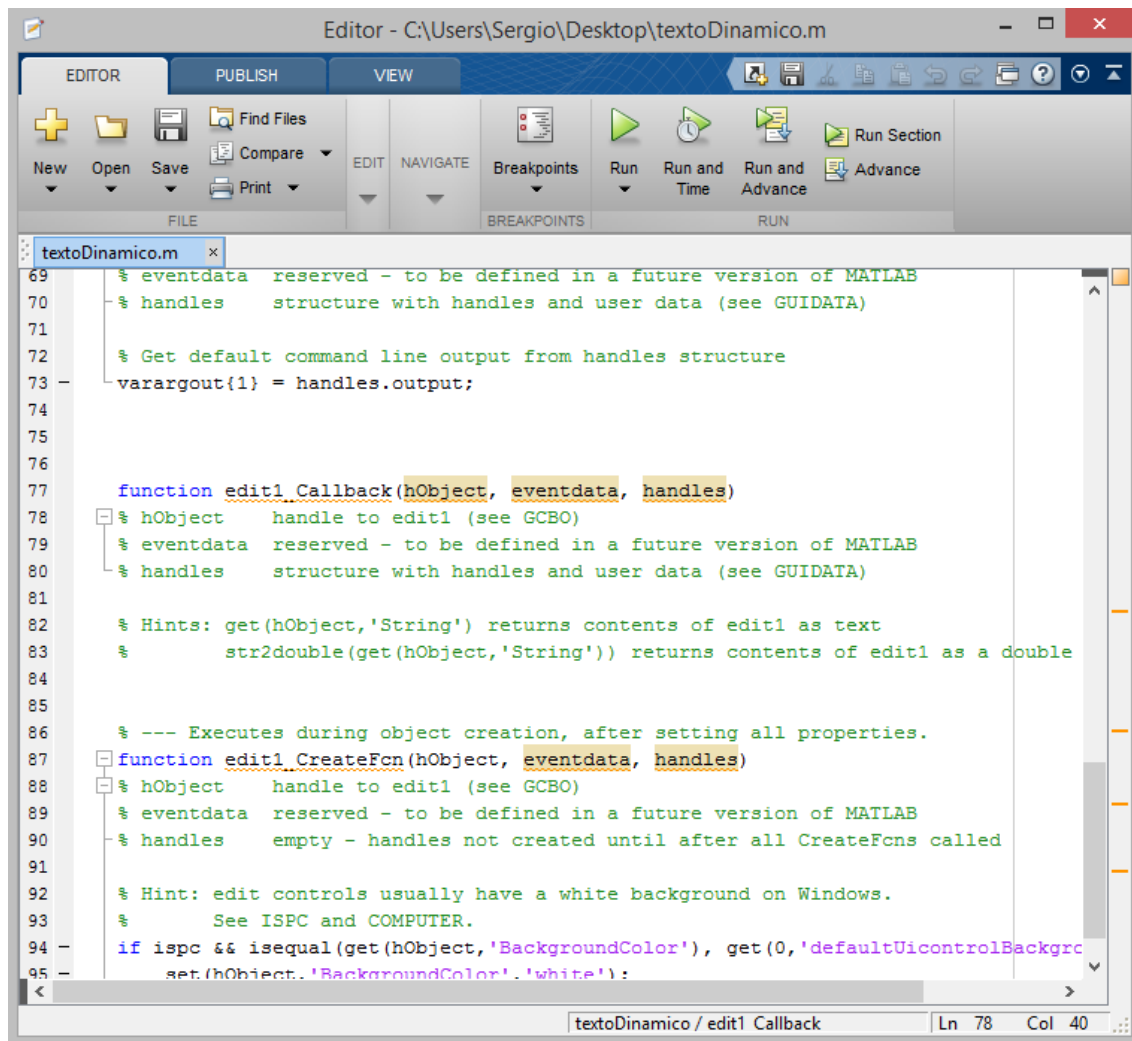


Figura 2.28: Archivo *.m con la lógica del programa

La lógica del programa está estructurada en distintas subfunciones que se corresponden con distintas acciones de la interfaz, también llamadas *Callbacks*. A modo de ejemplo, las distintas acciones que están asociadas a un texto dinámico se muestran en la figura 2.29:

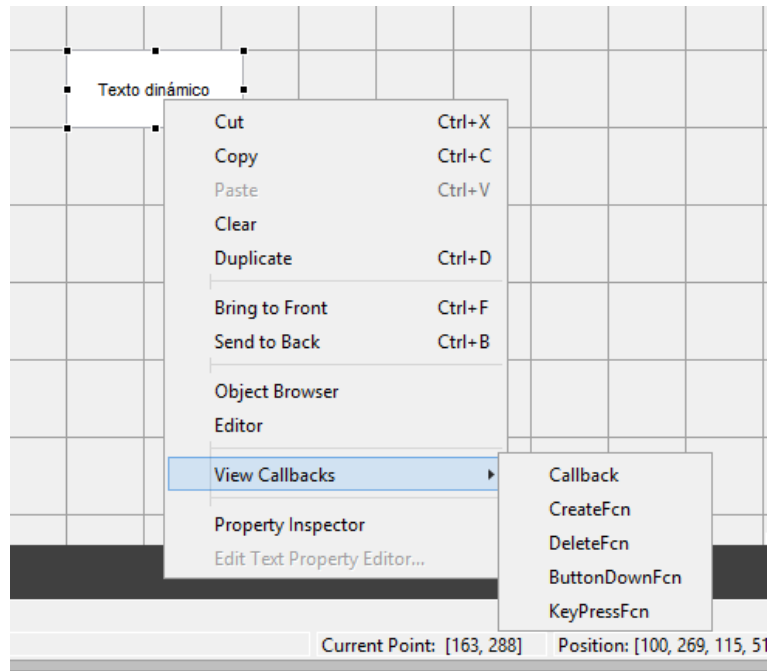


Figura 2.29: Acciones asociadas a un texto dinámico

Los distintos elementos de una interfaz interactúan entre sí. Los principales comandos empleados en el proyecto que permiten dicha interacción se exponen a continuación:

get Función que permite obtener el valor de una propiedad de un objeto específico.

```
valor1 = get(hObject,'String');
valor2 = get(handles.diametroEdit,'String');
```

str2double Función de conversión de formato cadena de caracteres a valor numérico en coma flotante de doble precisión. Es especialmente útil a la hora de obtener valores numéricos expresados en forma de texto para posteriormente operar con ellos.

```
input = str2double(get(hObject,'String'));
```

set Función que permite modificar el valor de una propiedad de un objeto específico.

```
set(handles.diametroEdit,'String','0.05');
```

guidata Función que guarda o lee datos en la estructura *handles* de la interfaz gráfica. El uso dado a *guidata* en el programa ha sido exclusivamente el de actualizar los valores modificados de las propiedades de los objetos de la interfaz. Para ello se ha empleado la siguiente sintaxis:

```
guidata(hObject,handles);
```

siendo *hObject* el objeto modificado.

errorDlg Crea y abre un diálogo de error. Sintaxis empleada:

```
errorDlg('Mensaje de error','Nombre de ventana',modal)
```

donde *modal* indica el tipo de comportamiento de la ventana.

isempty Indica si un array está vacío o no. En caso de estar vacío devuelve 1. En caso contrario, devuelve 0. En el programa se emplea principalmente en combinación con la función *get*.

```
stringVacio = isempty(get(hObject,'String'));
```

Capítulo 3

Desarrollo

El programa desarrollado para el cálculo de las frecuencias naturales y modos propios de vibración de vigas, bajo distintas condiciones de contorno según la teoría de Euler-Bernoulli, se muestra en la figura 3.1. A lo largo del documento se denominará a dicha aplicación AMVI (Análisis Modal de Vigas).

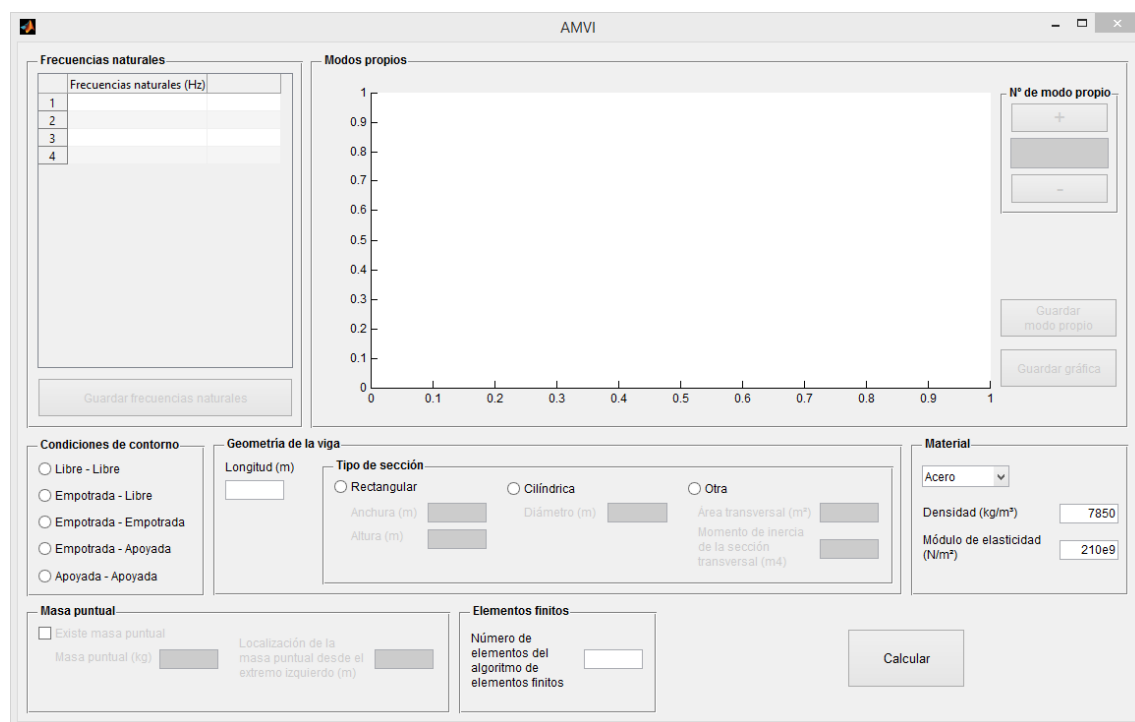


Figura 3.1: Programa de análisis modal de vigas (AMVI)

En el presente capítulo se tratará de la lógica, desarrollo, ejecución y empleo de la interfaz gráfica. Para ello, se procede a explicar de forma general el empleo de la interfaz, para posteriormente exponer el proceso de ejecución de las distintas subfunciones ligadas a los distintos elementos de la misma.

A continuación se realiza la comprobación del correcto funcionamiento del programa, comparando dos ensayos experimentales con los resultados obtenidos en AMVI.

Posteriormente, se muestran tres ejemplos del empleo del programa. Los análisis modales de vigas sin masa puntual constan de una resolución teórica de las

frecuencias naturales y modos propios de vibración de una viga, y una parte numérica consistente en obtenerlos mediante el programa AMVI. Dichas resoluciones se corresponden con los dos enfoques de análisis modal contenidos en la teoría: uno basado en la obtención de las expresiones teóricas de las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales (sección 2.2) y otro basado en cálculo matricial y elementos finitos (sección 2.3). Para análisis modales de vigas con masa puntual sólo se lleva a cabo una resolución numérica.

3.1. Descripción de la interfaz gráfica de AMVI

Al iniciar el programa se presenta la interfaz mostrada en la figura 3.1. En ella se puede apreciar una división horizontal de la aplicación en dos partes. La parte inferior se corresponde con la introducción de los datos de los que se compone el problema a resolver, y la superior muestra la solución al mismo.

La parte inferior se divide a su vez en paneles, a saber:

- Condiciones de contorno
- Geometría de la viga
- Tipo de sección
- Material
- Masa puntual
- Elementos finitos

En el panel “Condiciones de contorno”, se seleccionan las coacciones a las que está sometida la viga en estudio. Cinco son las opciones disponibles: extremos libres, viga en voladizo, viga biempotrada, viga empotrada-apoyada y viga biapoyada.

En el panel “Geometría de la viga” y, a su vez, subordinado a este en “Tipo de sección”, el usuario introduce las distintas propiedades geométricas necesarias.

Se introduce la longitud de la viga y se selecciona el tipo de sección. Dependiendo de la sección elegida, se habilitan distintos campos con el fin de obtener el área transversal de la sección y el momento de inercia con respecto al eje y . Así, en caso de seleccionar una sección rectangular, se habilitan “Anchura” y “Altura”. En el caso de que se seleccione una sección cilíndrica, se habilita “Diámetro”. Si la sección necesaria no se corresponde con las anteriores, se procede a seleccionar “Otro” para introducir el área transversal y el momento de inercia con respecto al eje y correspondientes.

El panel “Material” presenta un desplegable con los materiales “Acero”, “Aluminio” y “Otro”. En el caso de los dos primeros, al seleccionarlos, valores predefinidos de la densidad y módulo de elasticidad correspondientes a los mismos son asignados automáticamente en sus respectivos campos. En el tercer caso, han de ser introducidos por el usuario.

Una vez el campo de la longitud de la viga es rellenado correctamente, la opción “Existe masa puntual” en el panel “Masa puntual” se habilita para indicar la existencia de masa puntual situada a lo largo de la viga. Cuando se habilita dicha opción, se activan los campos de masa puntual y de la ubicación de la misma con respecto a la longitud de la viga.

Llegados a este punto, sólo resta indicar el número de elementos finitos con los que se resolverá el problema en el panel “Elementos finitos”.

Especificadas todas las variables del análisis se procede a solicitar el cálculo de las frecuencias naturales y los modos propios normalizados del sistema presionando en el botón “Calcular”.

En la parte superior se disponen los siguientes paneles:

- Frecuencias naturales
- Modos propios

Realizados los cálculos correspondientes, las frecuencias naturales del sistema se muestran en su respectivo panel en forma de tabla.

En el panel de los modos propios de vibración se mostrará el modo propio pre-seleccionado en el subpanel “N° de modo propio”. En caso de no haber ninguno indicado, se mostrará el modo propio normalizado correspondiente a la primera frecuencia natural o frecuencia fundamental. Para representar un modo propio distinto basta con introducir el modo deseado en el campo de texto del panel “N° de modo propio”. Se pueden emplear los botones “+” y “-” para incrementar o decrementar el número de modo propio representado.

Por último, los botones “Guardar frecuencias naturales”, “Guardar modo propio” y “Guardar gráfica” permiten guardar los resultados en forma de archivo.

Las frecuencias naturales y el modo propio se guardarán en formato de archivo de texto (*.txt) tras indicar los nombres de archivo en los diálogos de guardar archivo. En el caso de las gráficas, antes de ser guardadas se abren en una figura en la que se ha de presionar el botón “Guardar” para efectuar dicha acción, indicando el nombre de archivo con el que se guardarán en el disco duro.

Una vez presentados los distintos elementos de los que está compuesta la interfaz del programa AMVI, se procede a desarrollar con detenimiento los distintos elementos especificados con anterioridad.

3.1.1. Condiciones de contorno

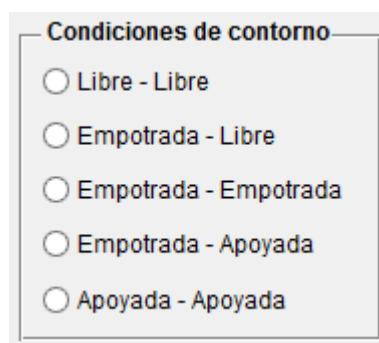


Figura 3.2: Panel de condiciones de contorno disponibles en AMVI

El panel de selección de la figura 3.2 muestra 5 opciones de condiciones de contorno para una viga en estudio:

- Viga con extremos libres

- Viga en ménsula o viga Cantilever
- Viga biempotrada
- Viga con extremos empotrado y apoyado
- Viga biapoyada

La lógica del programa detrás de la selección de una opción se representa en el diagrama de flujo 3.3 mostrado a continuación:

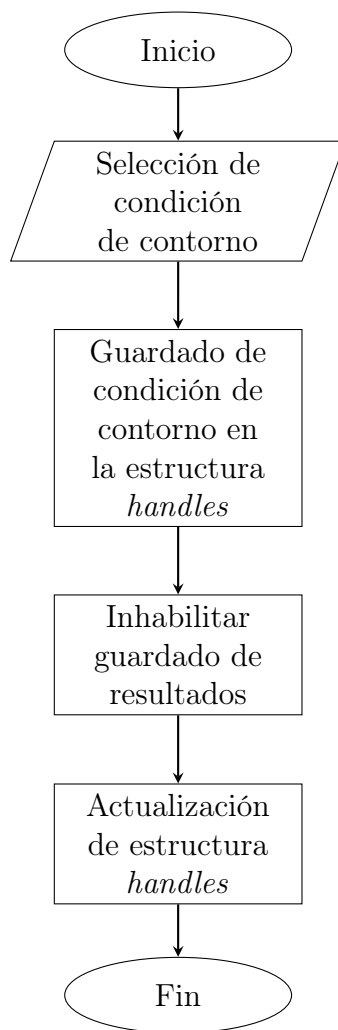


Figura 3.3: Diagrama de flujo del panel de selección de condición de contorno

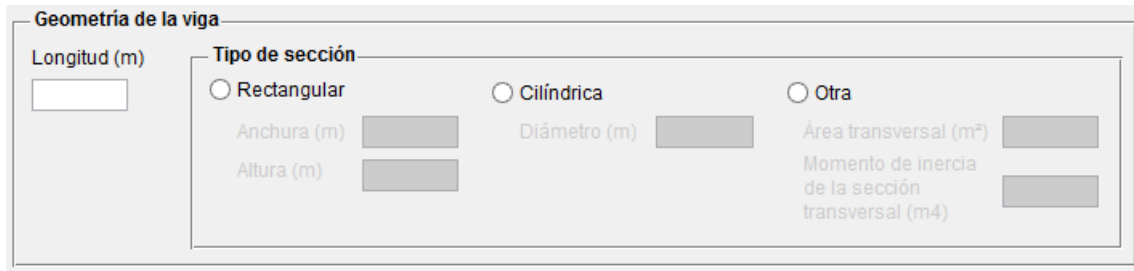
En el momento en el que el usuario selecciona una condición de contorno, la misma se guarda en la estructura *handles* de la interfaz gráfica del programa AMVI. La estructura *handles* permite que los distintos elementos de la interfaz se comuniquen entre sí. Cualquier modificación de un valor de la estructura *handles* dentro de un objeto de la interfaz (subfunción) ha de reflejarse fuera del mismo, por lo que es necesario actualizar dicha estructura mediante el comando `guidata()`.

A continuación, se procede a inhabilitar los elementos de salida de la interfaz, esto es, los botones “Guardar frecuencias naturales”, “Guardar modo propio” y “Guardar

gráfica” y los paneles “N° de modo propio” y “Frecuencias naturales”. Ello impide guardar resultados que no se correspondan con los datos mostrados en la parte inferior de la interfaz.

3.1.2. Geometría de la viga

El panel que recoge todas las propiedades de la geometría de la viga se muestra en la figura 3.4:



Geometría de la viga

Longitud (m)

Tipo de sección

☐ Rectangular ☐ Cilíndrica ☐ Otra

Anchura (m) Diámetro (m) Área transversal (m²)

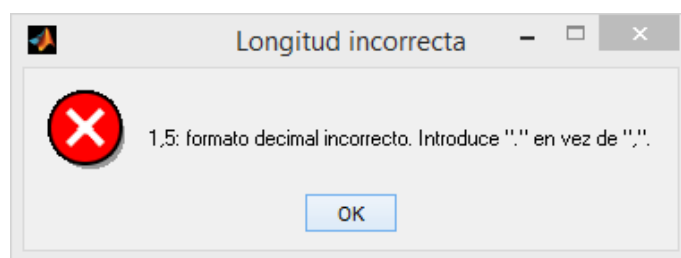
Altura (m) Momento de inercia de la sección transversal (m⁴)

Figura 3.4: Panel de la geometría de la viga

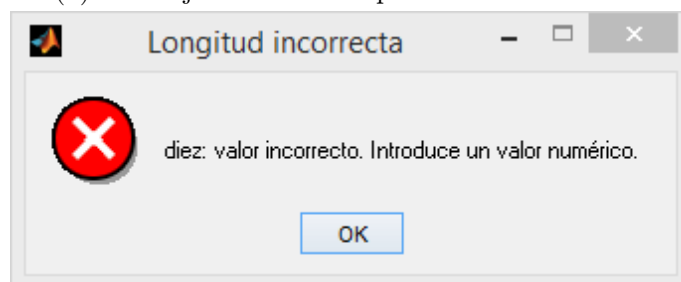
El primer dato, empezando por la izquierda, es el campo de la longitud de la viga (ver figura 3.4). La longitud:

- Ha de introducirse en metros.
- Debe ser un valor numérico.
- Mayor que cero, es decir, una cantidad positiva.
- En caso de tratarse de una cantidad real con parte decimal, se empleará el punto decimal en lugar de la coma decimal.
- Debe ser mayor o igual que la posición de la masa puntual, en caso de existir.

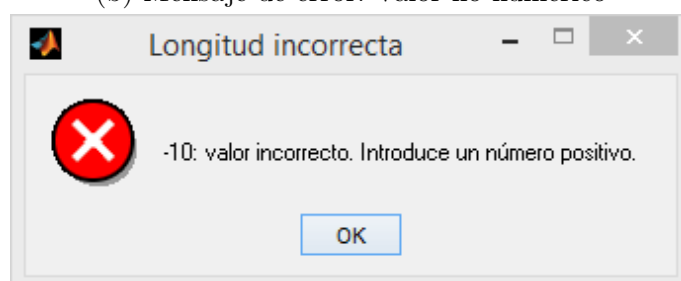
Al introducirse el valor, la lógica del programa AMVI asociada a dicho campo verifica que todas las condiciones anteriormente citadas se cumplen. En caso de no ser así, el valor es borrado para ser reintroducido y se muestra una ventana de error indicando el tipo de error cometido. Los mensajes de error se muestran en la figura 3.5:



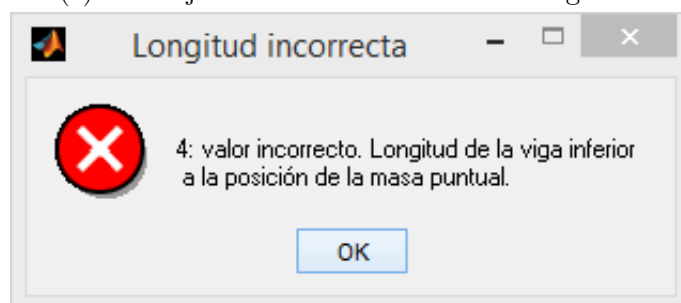
(a) Mensaje de error: Empleo de coma decimal



(b) Mensaje de error: Valor no numérico



(c) Mensaje de error: Valor numérico negativo

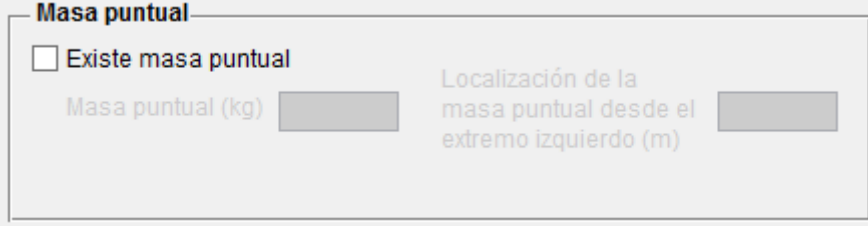


(d) Mensaje de error: Longitud de viga inferior a posición de la masa puntual

Figura 3.5: Mensajes de error del campo “Longitud”

De igual forma que en el apartado 3.1.1, en el momento que se introduce o modifica el valor del campo longitud, la parte superior de la interfaz AMVI, que muestra y gestiona los resultados (ver figura 3.1), se deshabilita. De esta forma, se obliga al usuario a pulsar el botón “Calcular” para volver a habilitarlos, permitiendo sólo modificarlos cuando los resultados se correspondan a los campos de entrada.

Una vez que el programa AMVI ha verificado la validez del valor introducido, se habilita la opción para indicar si existe masa puntual en la viga (ver figura 3.6):



Masa puntual

☐ Existe masa puntual

Masa puntual (kg)

Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m)

Figura 3.6: Panel de la masa puntual habilitado

En el caso de que no se introdujera ningún valor o se modificara un valor anterior para dejar el campo vacío, el valor asignado al campo “Longitud” será el string vacío.

La lógica ejecutada al introducir el valor de la longitud de la viga se muestra en las figuras 3.7 y 3.8:

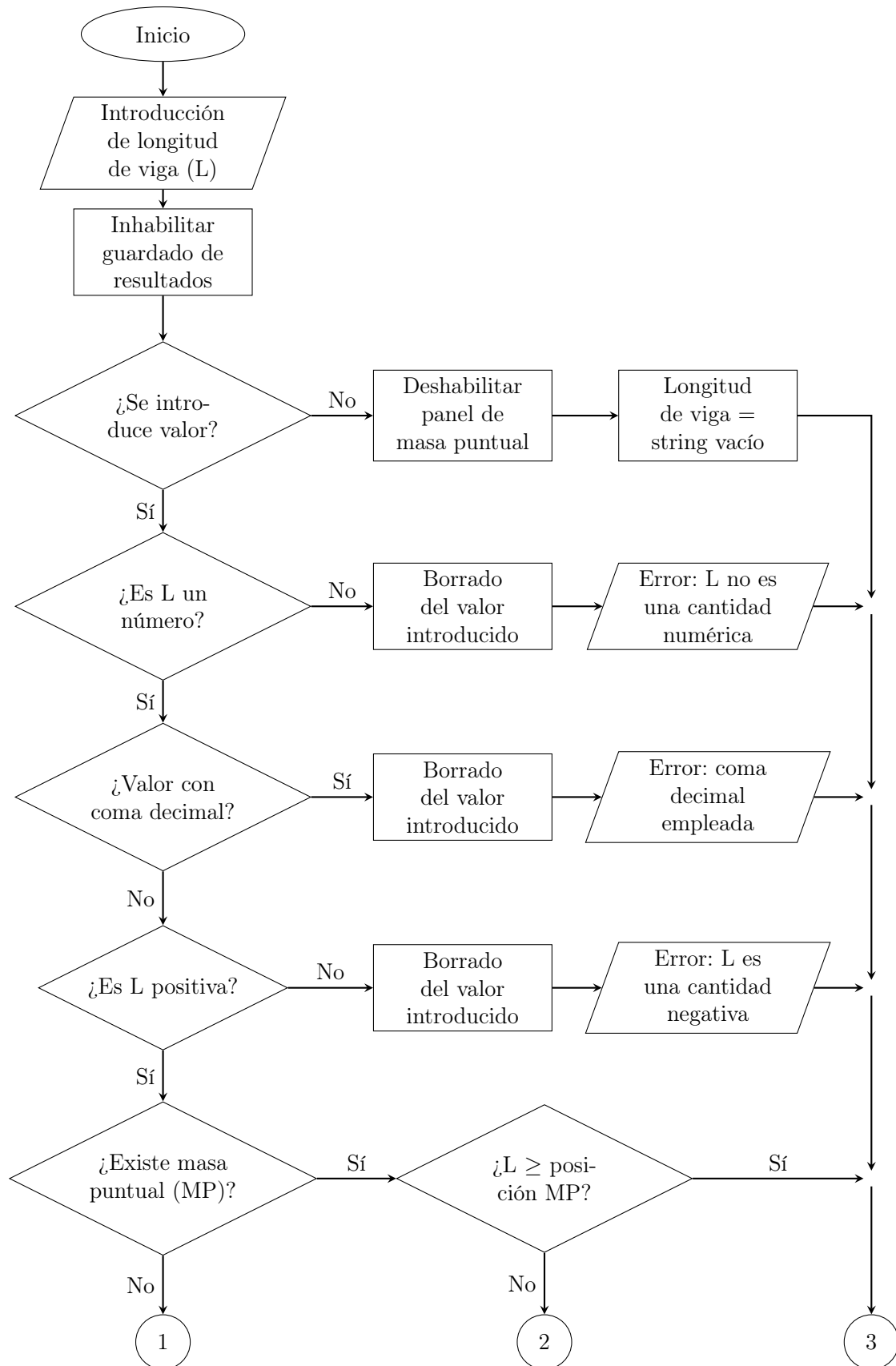


Figura 3.7: Primera parte del diagrama de flujo del campo “Longitud”

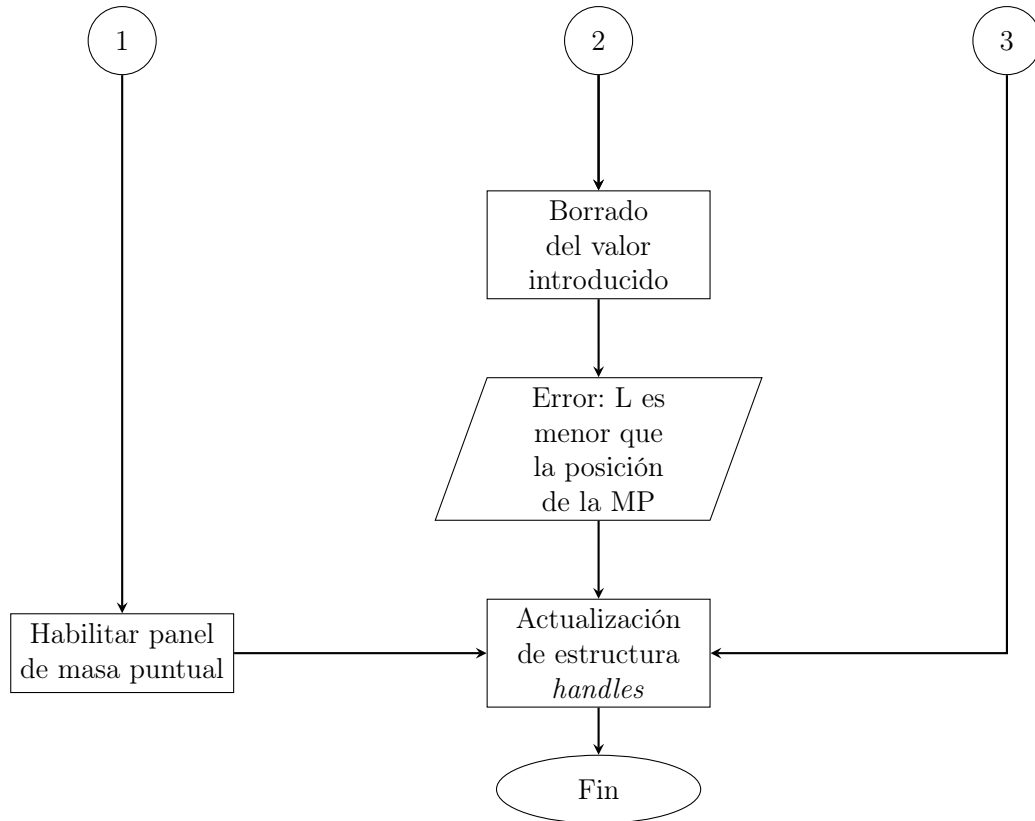


Figura 3.8: Segunda parte del diagrama de flujo del campo “Longitud”

El panel “Geometría de la viga” se compone de otro panel, denominado “Tipo de sección”, en el que se selecciona el tipo de sección transversal de la viga y se introducen los valores necesarios para que el programa pueda obtener o calcular el área transversal (m^2) y el momento de inercia con respecto al eje y (m^4).

Inicialmente ninguna opción está seleccionada y todos los campos subordinados a cada opción están inhabilitados.

Los campos correspondientes a cada tipo de sección son:

- Sección rectangular
 - Anchura (m)
 - Altura (m)
- Sección cilíndrica
 - Diámetro (m)
- Otro tipo de sección
 - Área transversal (m^2)
 - Momento de inercia de la sección transversal del eje y (m^4)

Al seleccionar una opción u otra, los campos subordinados a dicha opción se habilitan y el resto se deshabilitan. En la figura 3.9 se ilustra este comportamiento:

Tipo de sección

☒ Rectangular ☐ Cilíndrica ☐ Otra

Anchura (m) Diámetro (m) Área transversal (m²)

Altura (m) Momento de inercia de la sección transversal (m⁴)

(a) Panel del tipo de sección con la opción “Rectangular” seleccionada

Tipo de sección

☐ Rectangular ☒ Cilíndrica ☐ Otra

Anchura (m) Diámetro (m) Área transversal (m²)

Altura (m) Momento de inercia de la sección transversal (m⁴)

(b) Panel del tipo de sección con la opción “Cilíndrica” seleccionada

Tipo de sección

☐ Rectangular ☐ Cilíndrica ☒ Otra

Anchura (m) Diámetro (m) Área transversal (m²)

Altura (m) Momento de inercia de la sección transversal (m⁴)

(c) Panel del tipo de sección con la opción “Otra” seleccionada

Figura 3.9: Panel de tipo de sección

La figura 3.10 representa el diagrama de flujo de la lógica detrás del panel “Tipo de sección”, mostrado anteriormente en la figura 3.9:

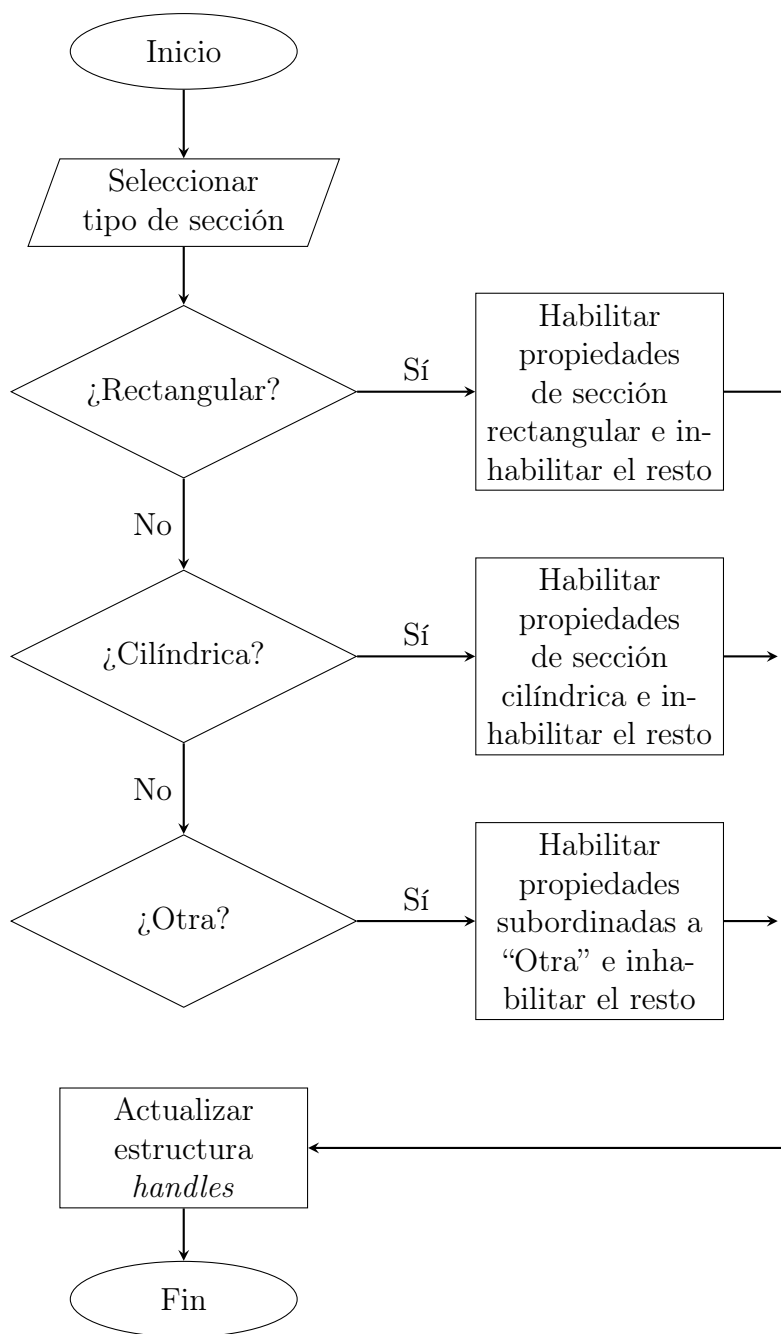


Figura 3.10: Diagrama de flujo del panel de selección de la sección transversal

Todos los campos subordinados del panel “Tipo de sección” (“Anchura”, “Altura”, “Diámetro”, “Área transversal” y “Momento de inercia de la sección transversal”) realizan un proceso de validación de datos similar al del campo “Longitud”:

- Si no se introduce valor se asigna una cadena de caracteres vacía al campo. En caso contrario, se continúa con los siguientes puntos.
- Se verifica si se introduce coma decimal.
- Se comprueba que el valor introducido es un número. Si no lo es, se muestra un mensaje de error.

- En caso de ser un número, se comprueba si es mayor que cero. Si es negativo o igual a cero, se muestra un mensaje de error.

A continuación se muestra la lógica de este proceso para el campo “Anchura (m)” en la figura 3.11:

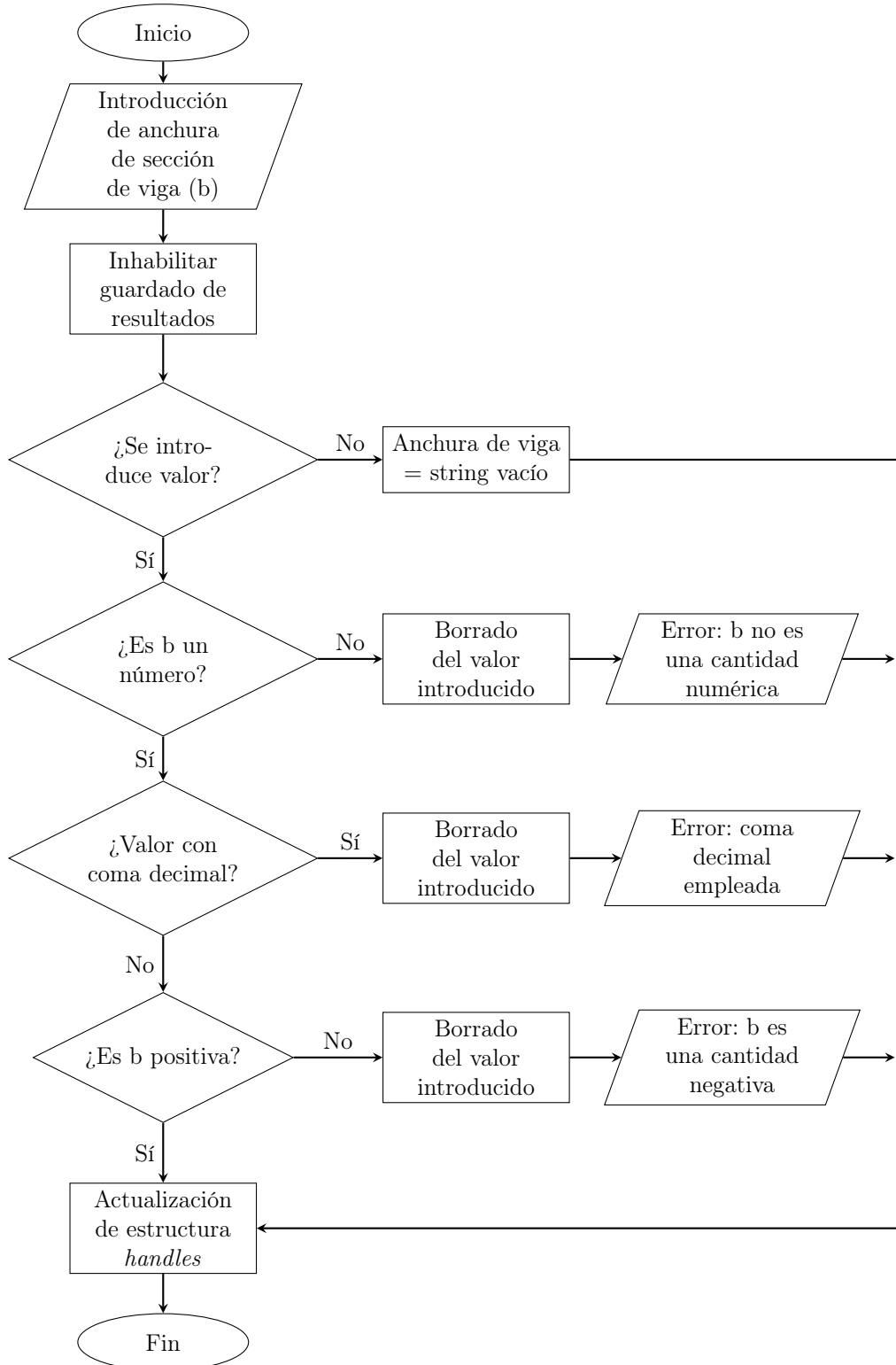


Figura 3.11: Diagrama de flujo del campo “Anchura”

Para el resto de los campos subordinados del panel “Tipo de sección”, el diagrama 3.11 representa su lógica simplemente sustituyendo “Anchura” por el campo correspondiente.

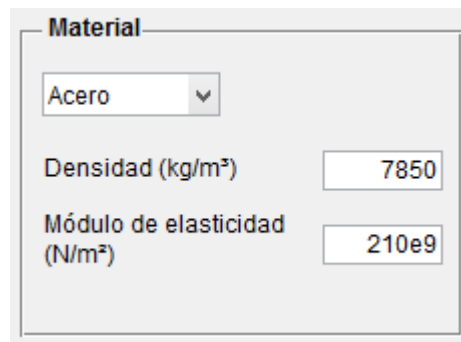
3.1.3. Material

El panel “Material” permite introducir los valores de densidad (kg/m^3) y módulo de Young (Pa) correspondientes al material del que está compuesta la viga. Para ello, el panel dispone de un desplegable que permite seleccionar distintos materiales, introducidos de antemano, que completan los campos “Densidad” y “Módulo de elasticidad” con sus respectivos valores.

El menú desplegable permite seleccionar tres opciones:

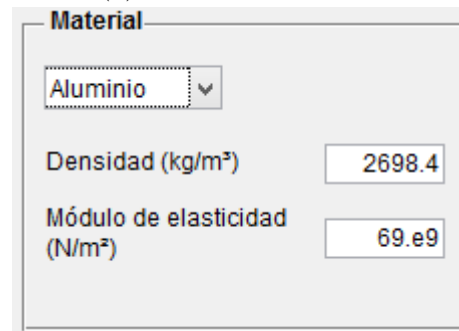
- Acero
- Aluminio
- Otro tipo de material

En la figura 3.12 se observan las distintas opciones seleccionadas con sus respectivos valores de densidad y módulo de elasticidad. En el caso “Otro”, se introducen las propiedades correspondientes a un material distinto a los listados.



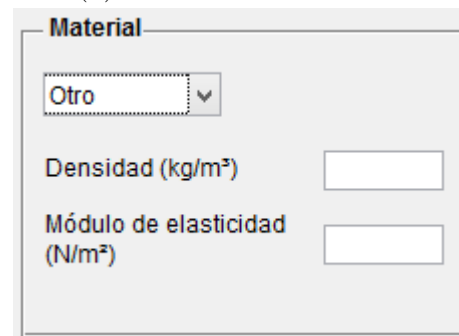
The screenshot shows a window titled "Material". At the top is a dropdown menu with "Acero" selected. Below it are two input fields: "Densidad (kg/m³)" with the value "7850" and "Módulo de elasticidad (N/m²)" with the value "210e9".

(a) Acero seleccionado



The screenshot shows the same "Material" window, but the dropdown menu now has "Aluminio" selected. The input fields show "Densidad (kg/m³)" as "2698.4" and "Módulo de elasticidad (N/m²)" as "69.e9".

(b) Aluminio seleccionado



The screenshot shows the "Material" window with the dropdown menu set to "Otro". The input fields for "Densidad (kg/m³)" and "Módulo de elasticidad (N/m²)" are now empty.

(c) Material personalizado

Figura 3.12: Panel de selección del material de la viga

Una vez seleccionado un material (“Acero” o “Aluminio”) los campos “Densidad” y “Módulo de elasticidad” se inhabilitan para evitar ser editados. Para poder introducir propiedades distintas es necesario seleccionar la opción “Otro” y dichos campos se habilitan y vacían para su edición.

Cuando se selecciona un material distinto al anteriormente seleccionado el guardado de resultados es inhabilitado. En cambio, si al seleccionar un nuevo material, la selección resulta ser la misma, no se produce el deshabilitado.

En la figura 3.13 se muestra la lógica detrás del panel de selección de material:

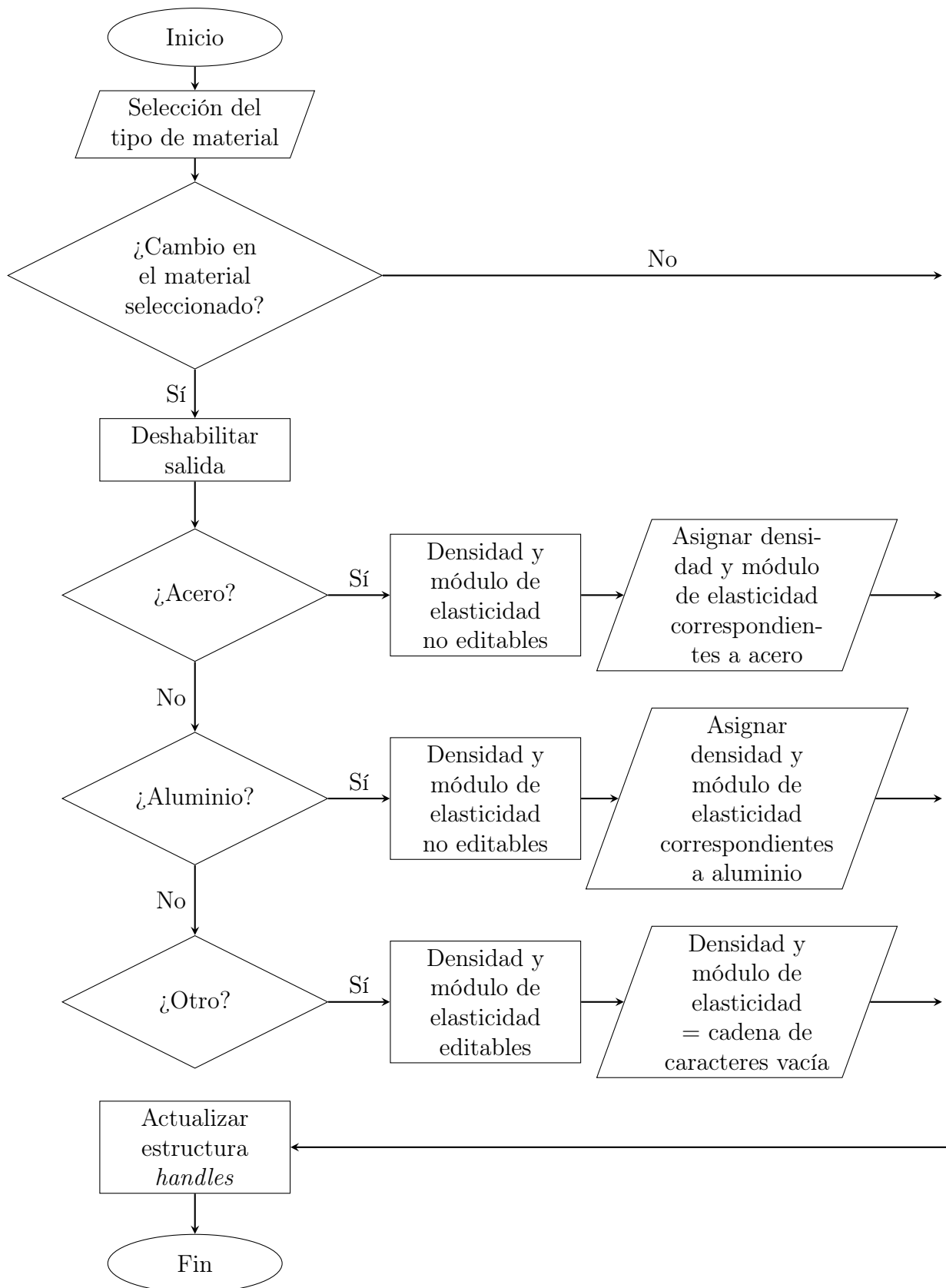


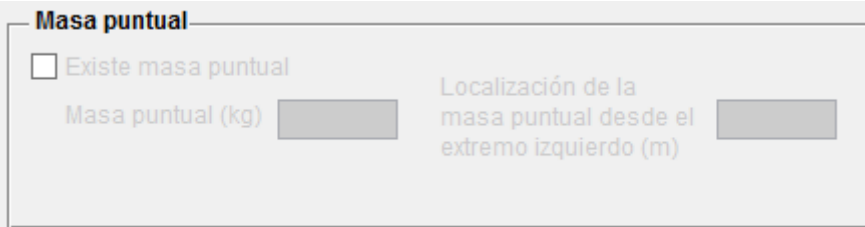
Figura 3.13: Diagrama de flujo del menú de selección del tipo de material

En el caso de seleccionar la opción “Otro” e introducir manualmente los valores de densidad y módulo de elasticidad, la lógica correspondiente a cada campo será

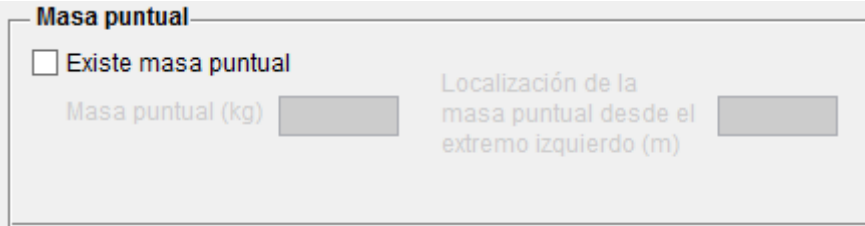
equivalente a la del campo “Anchura”, figura 3.11.

3.1.4. Masa puntual

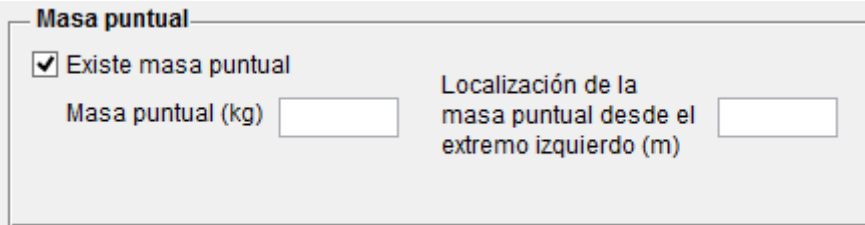
Al inicializarse el programa AMVI el panel “Masa puntual” se encuentra deshabilitado (3.14a). Es necesaria la introducción de la longitud de la viga para habilitar la casilla “Existe masa puntual” (3.14b). Los campos de “Masa puntual” y la localización de la masa puntual se habilitan una vez seleccionada la casilla “Existe masa puntual” (3.14c). De igual forma, si se deselecciona la casilla “Existe masa puntual” los campos anteriores se deshabilitarán de nuevo (3.14b).

The image shows a software panel titled "Masa puntual" with a light gray background and a thin border. At the top left, there is a checkbox labeled "Existe masa puntual" which is unchecked. Below it, the text "Masa puntual (kg)" is followed by a disabled gray input field. To the right, the text "Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m)" is followed by another disabled gray input field.

(a) Panel “Masa puntual” inactivo

The image shows the same "Masa puntual" panel. The checkbox "Existe masa puntual" is now checked. The input fields for "Masa puntual (kg)" and "Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m)" are now active, shown as white boxes with gray borders.

(b) Casilla “Existe masa puntual” habilitada

The image shows the "Masa puntual" panel with the checkbox "Existe masa puntual" checked. The input fields for "Masa puntual (kg)" and "Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m)" are active and contain some text, indicating they are ready for user input.

(c) Panel “Masa puntual” activo

Figura 3.14: Panel “Masa puntual”

Asimismo, en caso de que el campo de la posición de la masa puntual contenga un valor, dicho valor será comparado con la longitud de la viga introducida anteriormente. Si la longitud de la viga es inferior a la posición de la masa puntual, el valor de la posición es borrado y se muestra un error indicando esta situación, como puede observarse en la figura 3.15:

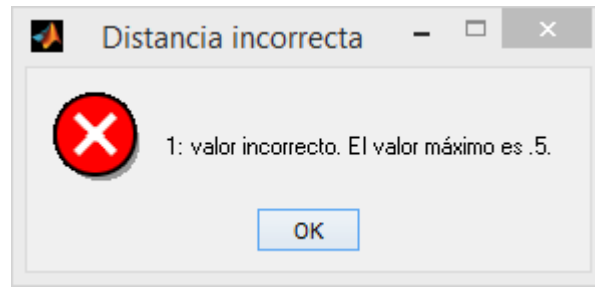


Figura 3.15: Error “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo” > “Longitud de la viga”

La lógica de la casilla “Existe masa puntual” se muestra en el diagrama de flujo 3.16, donde se emplean las siguientes abreviaturas por razones de espacio:

EMP: casilla “Existe masa puntual”

MP: campo “Masa puntual”

XMP: campo “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo”

LV: campo “Longitud de la viga”

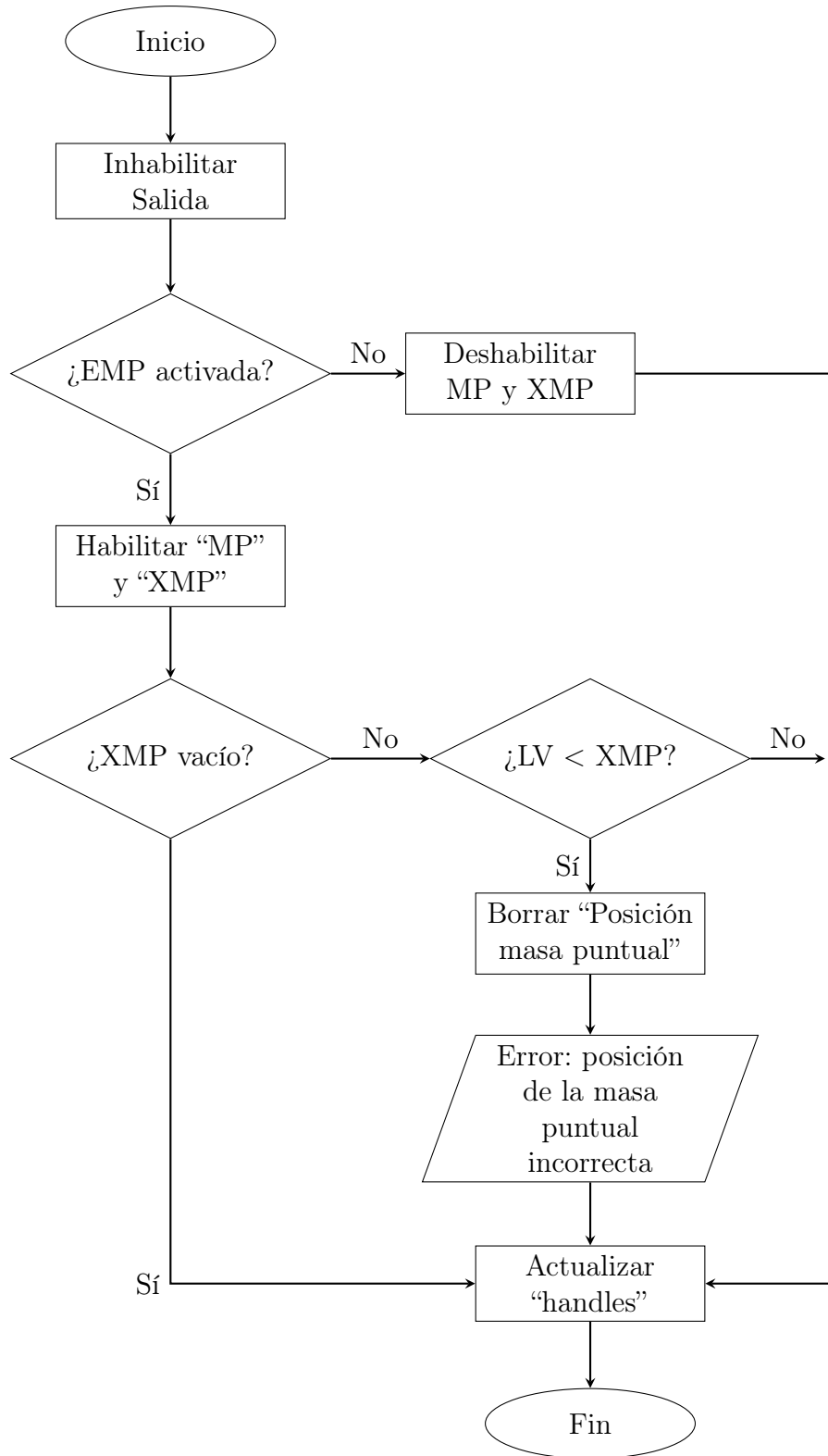


Figura 3.16: Lógica de selección de la casilla “Existe masa puntual”

La lógica de los campos “Masa puntual” y “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo” es equivalente a la de la figura 3.11, con la excepción de que el campo posición de la masa puntual no podrá ser superior a la longitud de la viga. Por ello, el diagrama de flujo del campo posición de la masa puntual se muestra en la figura 3.17:

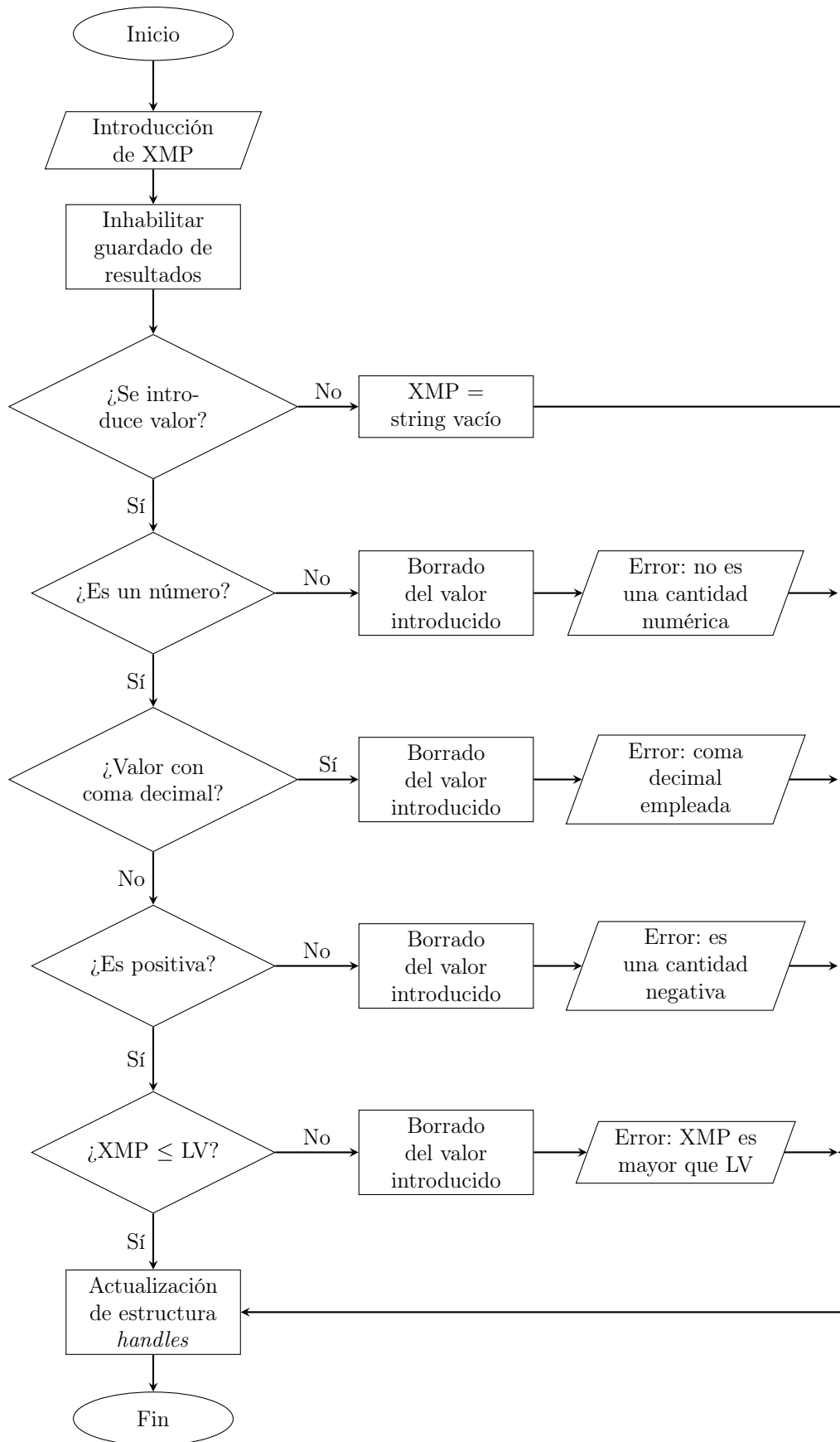


Figura 3.17: Diagrama de flujo del campo “Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo”

3.1.5. Elementos finitos

Una vez introducidos todos los datos del sistema a resolver, sólo resta introducir el número de elementos finitos en los que la longitud de la viga será segmentada para proceder al cálculo del algoritmo de elementos finitos (figura 3.18):

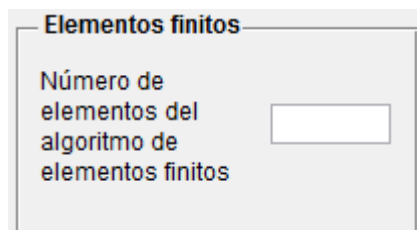
A screenshot of a software panel titled "Elementos finitos" in bold black text. Below the title, the text "Número de elementos del algoritmo de elementos finitos" is displayed in a smaller font. To the right of this text is a rectangular input box for entering a numerical value.

Figura 3.18: Panel de elementos finitos

El valor introducido ha de ser numérico y mayor de cero. La lógica de introducción de dicho valor es semejante a la de la figura 3.11.

A la hora de introducir el número de elementos finitos, cuanto mayor sea dicha cantidad, mayor precisión en los resultados se obtiene y menor es el error cometido. De igual forma, a mayor precisión, el coste computacional se incrementa, haciéndose necesario el empleo de un ordenador con mayor capacidad de cálculo o la inversión de más tiempo en el cálculo de las soluciones.

Por ello, el programa no contempla un límite superior en el número de elementos finitos que es posible introducir, dejando al criterio del usuario dicho valor.

Un valor razonable para un ordenador personal sería 1000 elementos finitos.

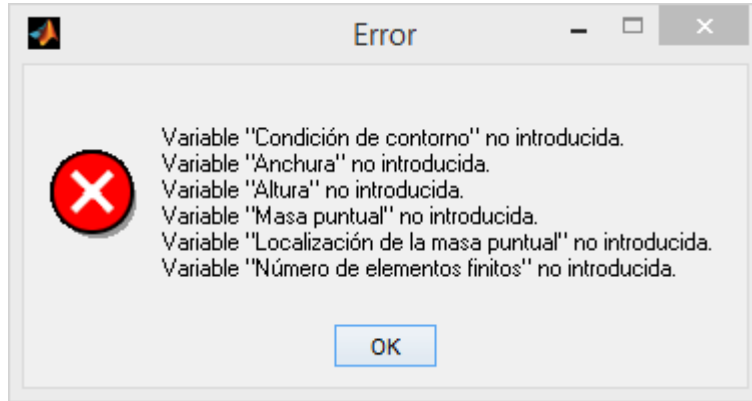
3.1.6. Análisis modal

Una vez introducidos todos los valores de la viga a analizar se procede al cálculo de los resultados. Para ello, en el programa AMVI basta con pulsar el botón "Calcular".

Al presionar dicho botón, el programa comprueba que todos los valores necesarios para realizar los cálculos han sido introducidos. En caso contrario, se mostrará un mensaje de error indicando los campos que faltan por rellenar. Un ejemplo de ello puede observarse en la figura 3.19:



(a) Validación de introducción de valores - Ejemplo 1



(b) Validación de introducción de valores - Ejemplo 2

Figura 3.19: Comprobación de introducción de valores en los campos

Validados los datos de entrada se procede a realizar los cálculos necesarios para obtener las frecuencias naturales de la viga, así como los modos propios normalizados ligados a cada frecuencia natural.

Los resultados se muestran en los paneles “Frecuencias naturales” y “Modos propios”. Los botones de guardado de resultados y el panel “Nº de modo propio” se habilitan.

En la representación del modo propio, en caso de no haber sido modificado el campo “Nº de modo propio” previamente, se representa el modo propio ligado a la frecuencia fundamental, el modo con valor 1. En caso contrario, se representará aquél indicado en el panel “Nº de modo propio”.

La figura 3.20 muestra el diagrama de flujo de la lógica explicada:

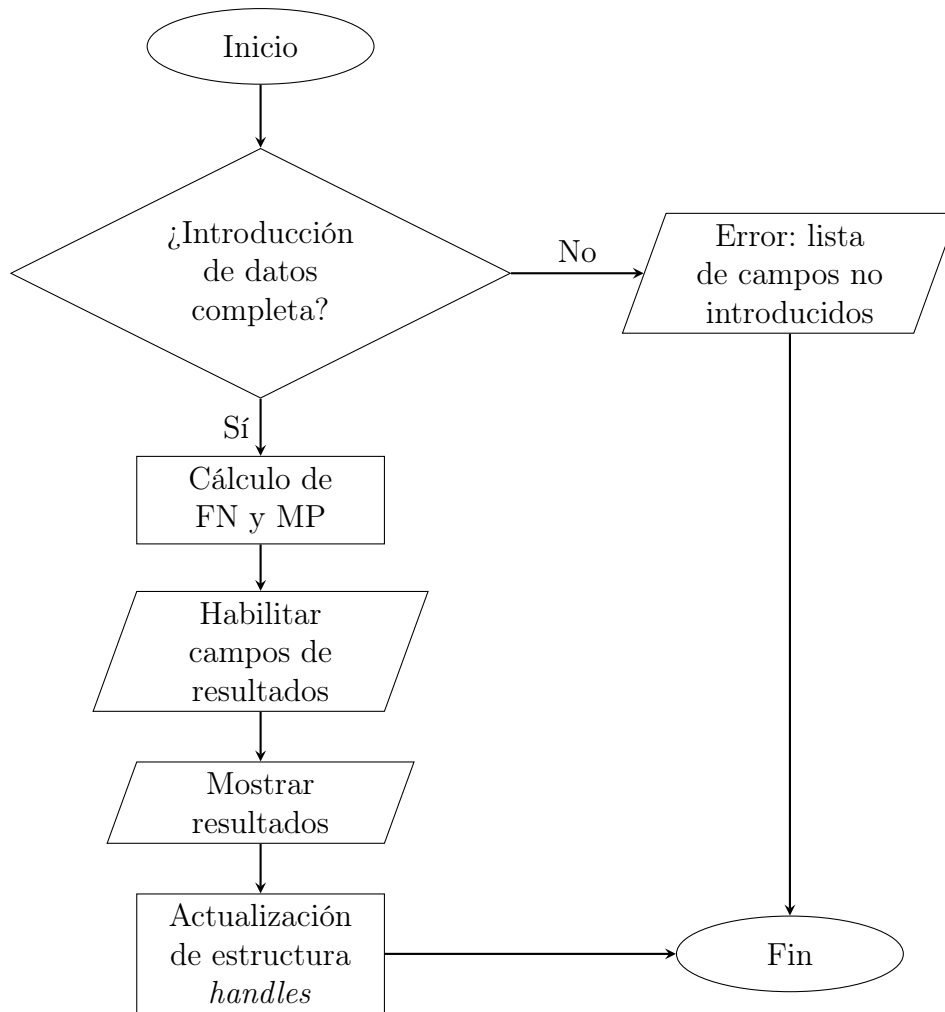


Figura 3.20: Lógica del botón “Calcular”

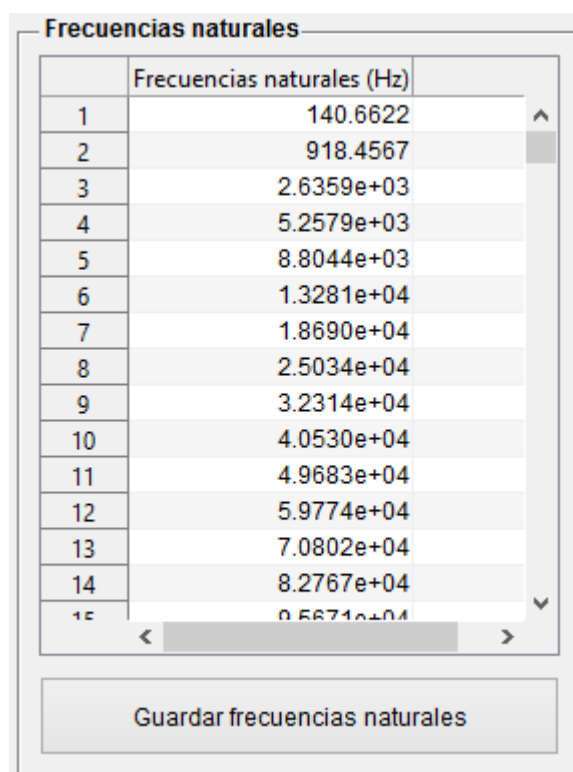
donde:

FN: frecuencias naturales

MP: modos propios

3.1.7. Frecuencias naturales

Tras ser pulsado el botón “Calcular” las frecuencias naturales son mostradas en el panel “Frecuencias naturales” (figura 3.21), compuesto por la tabla que contiene las frecuencias naturales y el botón “Guardar frecuencias naturales”:



The screenshot shows a window titled "Frecuencias naturales". Inside, there is a table with 15 rows and 2 columns. The first column contains numbers 1 through 15, and the second column contains natural frequencies in Hz. The values are: 140.6622, 918.4567, 2.6359e+03, 5.2579e+03, 8.8044e+03, 1.3281e+04, 1.8690e+04, 2.5034e+04, 3.2314e+04, 4.0530e+04, 4.9683e+04, 5.9774e+04, 7.0802e+04, 8.2767e+04, and 9.5671e+04. Below the table is a button labeled "Guardar frecuencias naturales".

| | Frecuencias naturales (Hz) |
|----|----------------------------|
| 1 | 140.6622 |
| 2 | 918.4567 |
| 3 | 2.6359e+03 |
| 4 | 5.2579e+03 |
| 5 | 8.8044e+03 |
| 6 | 1.3281e+04 |
| 7 | 1.8690e+04 |
| 8 | 2.5034e+04 |
| 9 | 3.2314e+04 |
| 10 | 4.0530e+04 |
| 11 | 4.9683e+04 |
| 12 | 5.9774e+04 |
| 13 | 7.0802e+04 |
| 14 | 8.2767e+04 |
| 15 | 9.5671e+04 |

Guardar frecuencias naturales

Figura 3.21: Frecuencias naturales resultantes

El botón “Guardar frecuencias naturales” se encarga de guardar, en la carpeta especificada por el usuario, las frecuencias naturales en formato texto (*.txt) (ver figura 3.22). Dicho formato permite una fácil exportación a hojas de cálculo. Posteriormente, en el momento en el que sea necesario volver a guardar nuevos valores de frecuencias naturales, el programa recordará la ruta empleada en el anterior guardado.

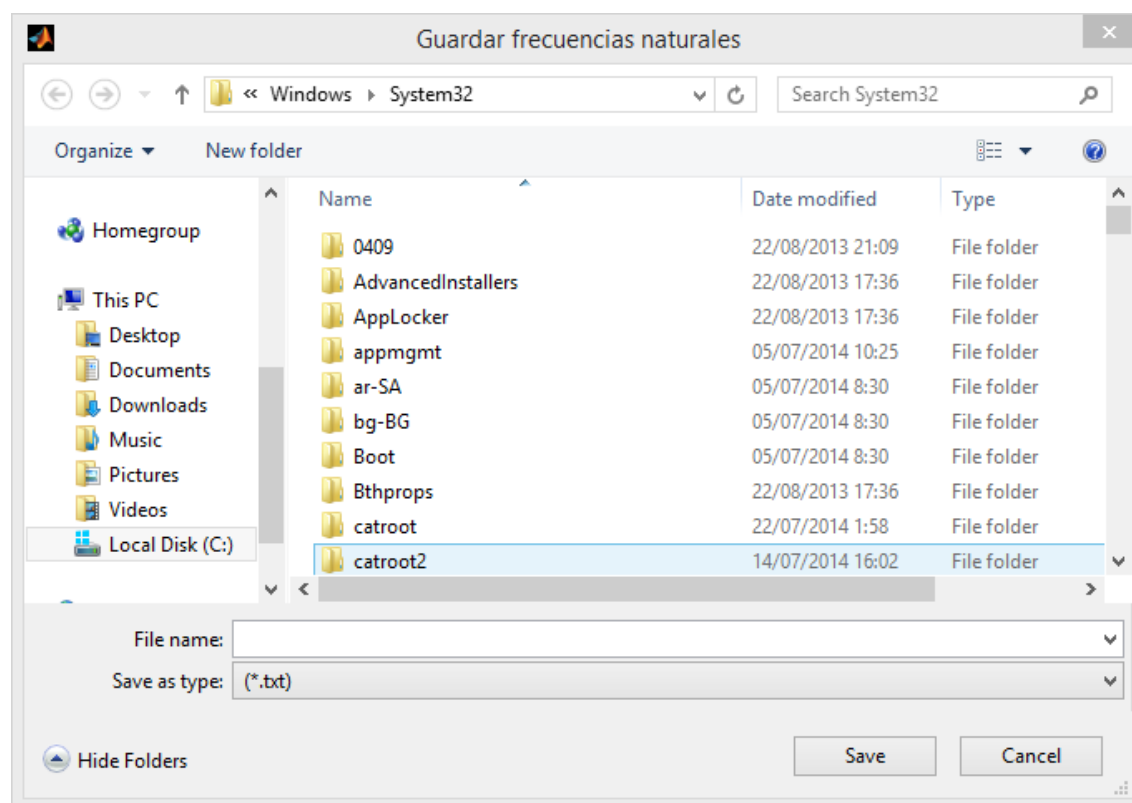


Figura 3.22: Diálogo de guardado de frecuencias naturales

3.1.8. Modos propios normalizados

El panel “Modos propios” representa el modo propio normalizado ligado a cada frecuencia natural mostrada en el panel de frecuencias naturales (figura 3.23):

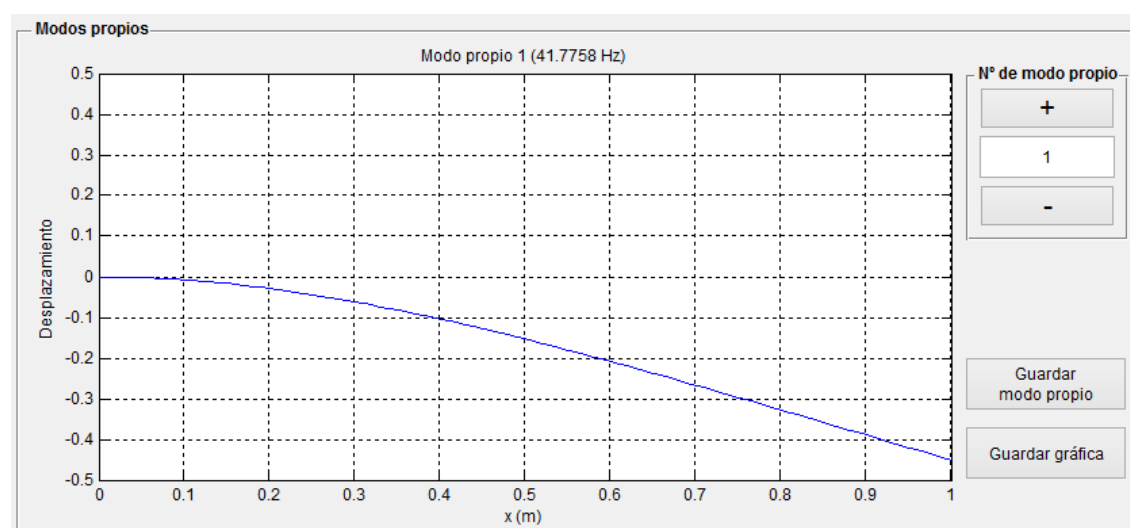


Figura 3.23: Panel de representación de modos propios

El panel “Nº de modo propio” (figura 3.24) permite seleccionar el modo propio i -ésimo ligado a cada frecuencia natural para ser representado, estando “ i ” comprendido entre 1 y el máximo número de frecuencias naturales. En caso de introducirse

un valor distinto al intervalo anterior se mostrará un error y se reintroducirá el modo propio a representar. De igual forma, se mostrará un mensaje de error en caso de introducir un valor no numérico o un valor numérico con coma o punto decimal, es decir, un número real. Los posibles errores son mostrados en la figura 3.25:

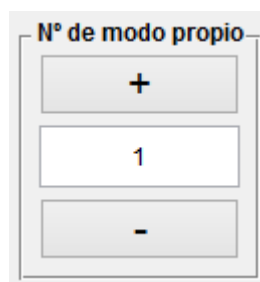
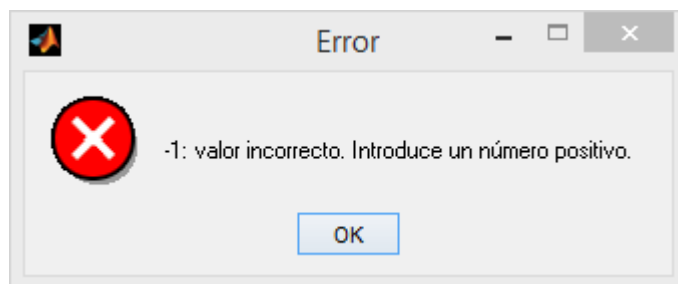
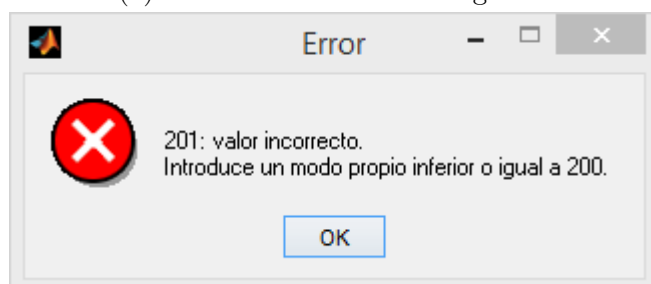


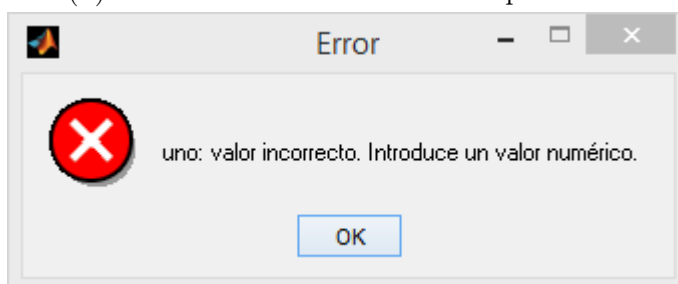
Figura 3.24: Panel de selección de modo propio a representar



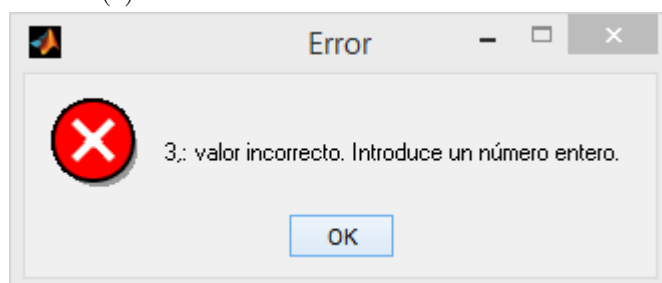
(a) Introducción de valor negativo



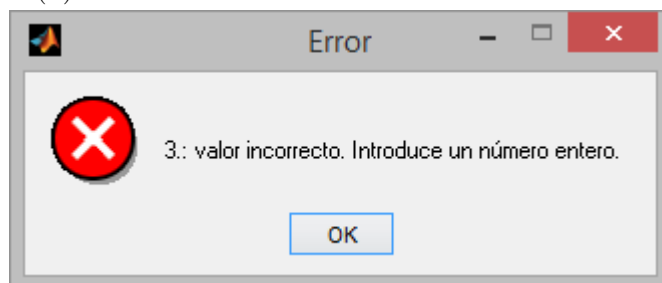
(b) Introducción de valor máximo permitido



(c) Introducción de valor no numérico



(d) Introducción de valor real con coma decimal



(e) Introducción de valor real con punto decimal

Figura 3.25: Errores de “Nº de modo propio”

Asimismo, la lógica del campo del panel de “Nº de modo propio” (figura 3.24) se representa en el diagrama de flujo de la figura 3.26, donde “maxFN” es el número

máximo de frecuencias naturales del sistema:

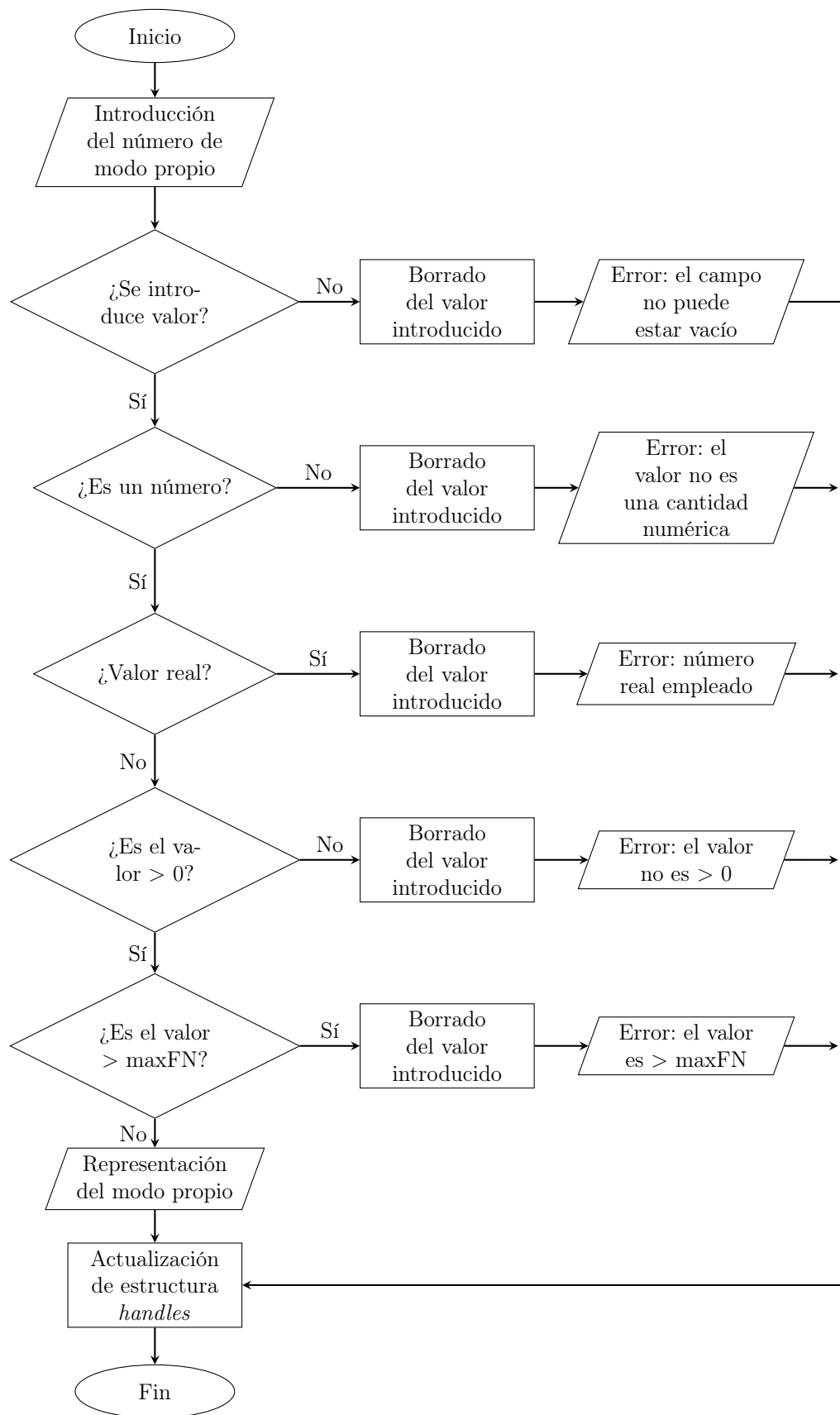


Figura 3.26: Diagrama de flujo del campo de selección del panel “Nº de modo propio”

El panel “Nº de modo propio” contiene 2 botones: botón “+” y botón “-”. Permiten incrementar y decrementar, respectivamente, el número de modo propio y representarlo. Los valores mínimo y máximo serán 1 y el máximo número de frecuencias naturales.

El botón “Guardar modo propio” se encarga de guardar, en la carpeta especificada por el usuario, el modo propio normalizado de vibración, ligado a la frecuencia natural seleccionada en el panel “Nº de modo propio”, en un archivo de texto con formato *.txt (ver figura 3.27). Dicho formato permite una fácil exportación a hojas de cálculo. Posteriormente, en el momento en el que sea necesario volver a guardar otros modos propios, el programa recordará la ruta empleada en el anterior guardado.

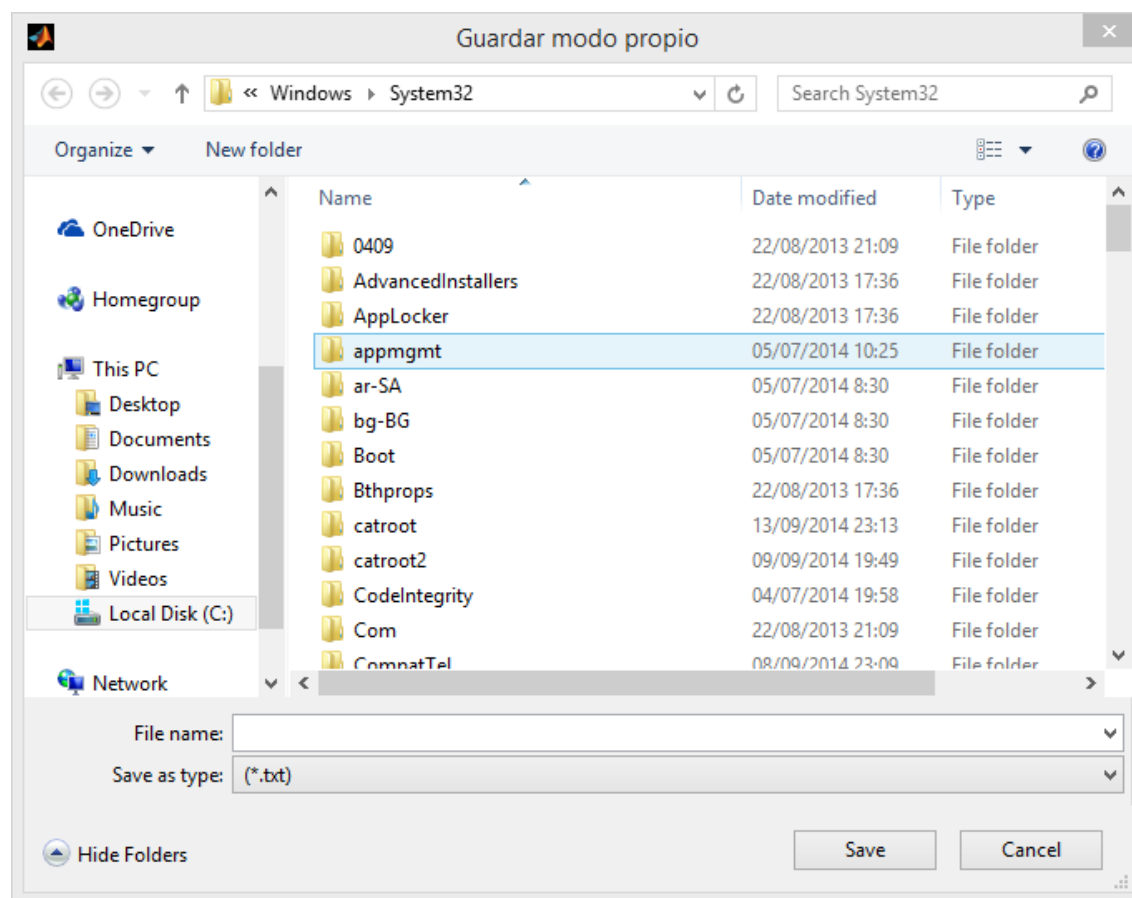


Figura 3.27: Diálogo de guardado del modo propio normalizado

El botón “Guardar gráfica” permite abrir en una ventana aparte la gráfica representada, como puede observarse en la figura 3.28. En ella existen distintas opciones para configurar la representación del modo propio. Una vez realizados los retoques deseados, se selecciona en el menú “File” o “Archivo” la opción “Save” o “Guardar” para salvar dicha gráfica al disco duro en un archivo con la extensión deseada (ver figura 3.29).

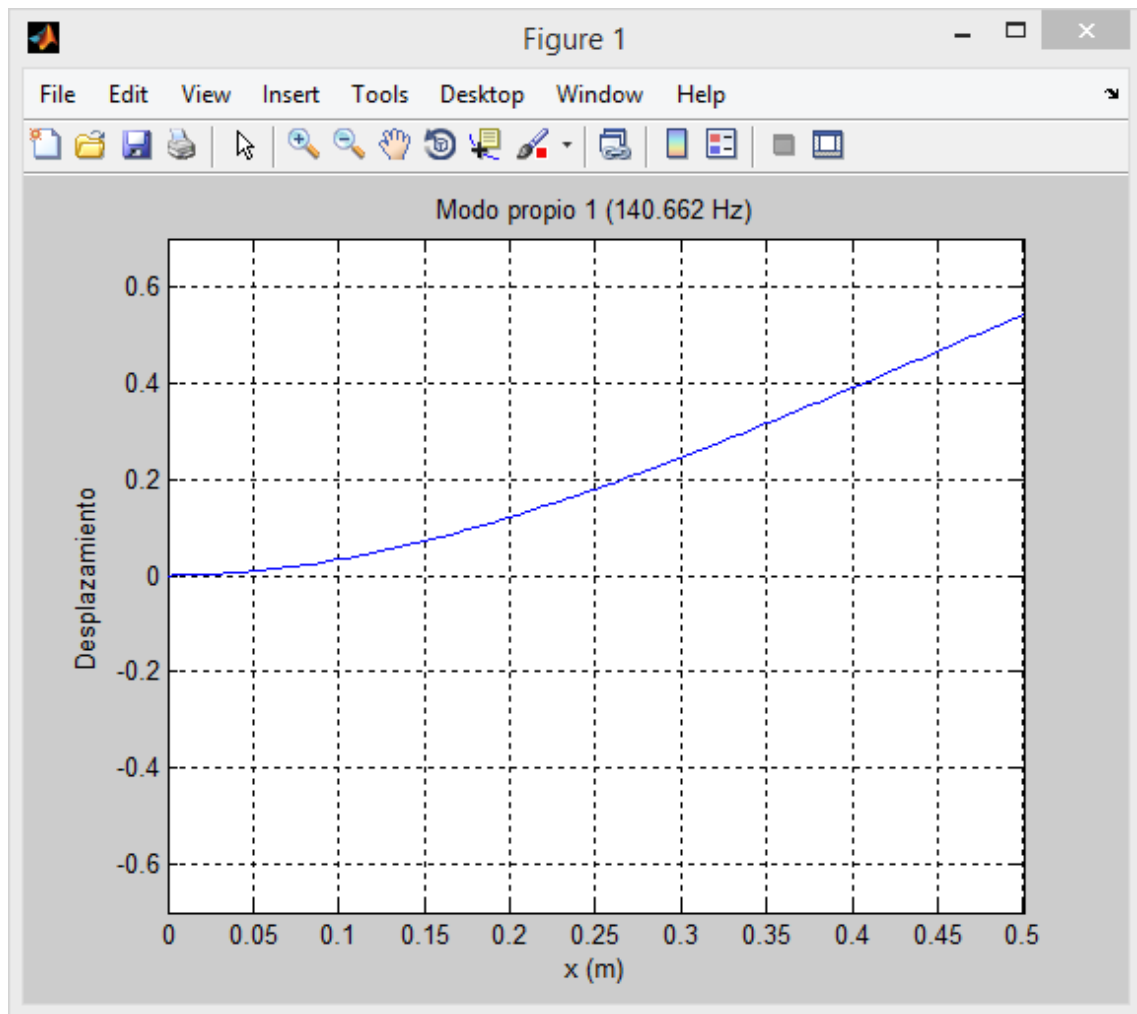


Figura 3.28: Ventana de configuración de gráfica de modo propio a guardar

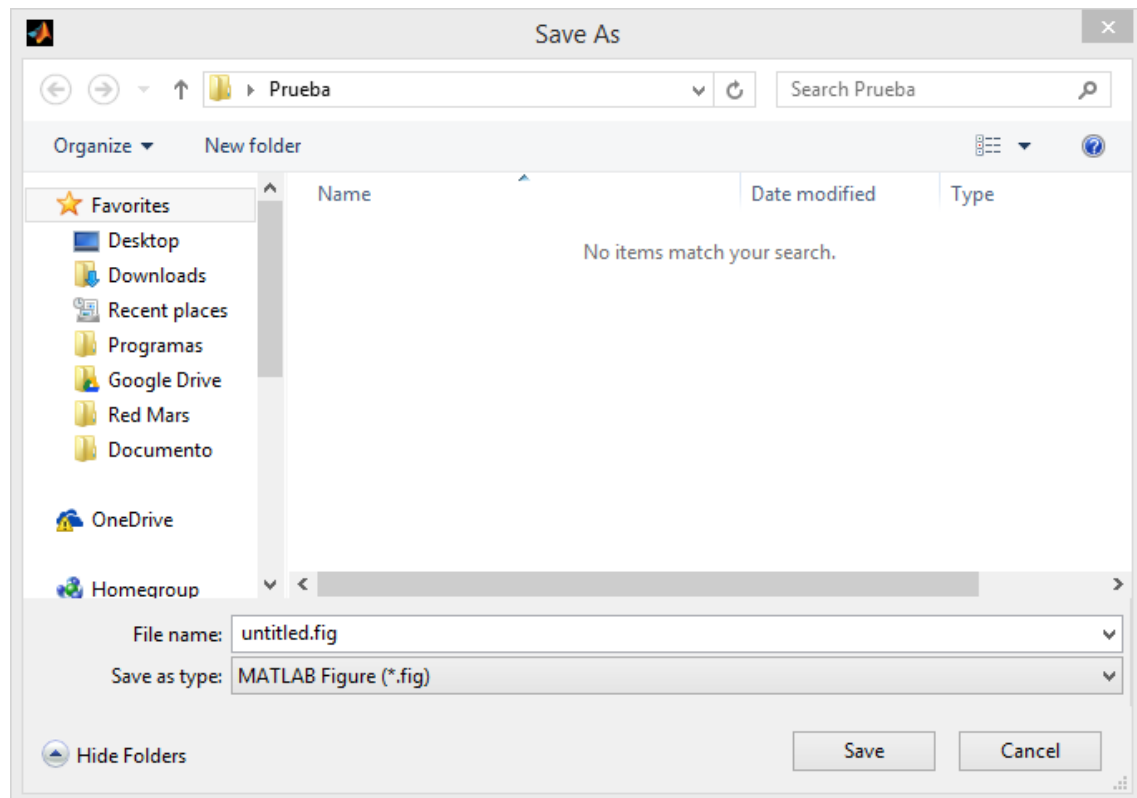


Figura 3.29: Diálogo de guardado de gráfica de modo propio

3.2. Comprobación del funcionamiento del programa AMVI

Los resultados obtenidos en el cálculo de las frecuencias naturales y modos propios de vibración mediante el programa AMVI se han de comparar con el comportamiento de un sistema real para demostrar el correcto funcionamiento del mismo.

Para ello, se trabaja con el artículo “Theoretical and experimental modal analysis of a cantilever steel beam with a tip mass”[6] y el artículo “On the eigenfrequencies for mass loaded beams under classical boundary conditions”[5].

El artículo [6] (comprobación nº 1) analiza experimentalmente el comportamiento de una viga en ménsula con masa puntual en su extremo, obteniendo sus frecuencias naturales mediante métodos estocásticos. Se comparan los datos obtenidos con el análisis de elementos finitos y el cálculo teórico de las frecuencias naturales de una viga de sección continua mediante la teoría de Euler-Bernoulli.

El artículo [5] (comprobación nº 2) discute las distintas ecuaciones de frecuencia de vigas de sección continuas con masa puntual bajo distintas condiciones de contorno mediante la teoría de Euler-Bernoulli y su comparación con datos experimentales y los resultados obtenidos por el método de Rayleigh.

3.2.1. Comprobación nº 1

Análisis experimental

El sistema analizado está formado por una viga en ménsula de sección transversal rectangular con masa puntual en su extremo. Las propiedades de la viga se muestran en la tabla 3.1:

| Longitud | Anchura | Altura | Densidad | Módulo de elasticidad |
|----------|---------|----------|--------------------------|-----------------------|
| 47 cm | 2,5 cm | 0,115 cm | 7618,5 kg/m ³ | 197,19 GPa |

Tabla 3.1: Propiedades de la viga a analizar en la comprobación nº 1

Para obtener la respuesta dinámica del sistema se emplea un acelerómetro (masa puntual) con masa de 30,4 g, situado en el extremo libre.

La viga se somete al choque de una pequeña masa sobre la viga, permitiendo que vibre libremente. El movimiento de la viga resultante será una vibración libre.

Aplicado el método estocástico para la obtención experimental de las frecuencias naturales, las cinco primeras frecuencias del sistema se muestran en la tabla 3.2:

| Modo | Frecuencia natural (Hz) |
|------|-------------------------|
| 1° | 2,86 |
| 2° | 22,04 |
| 3° | 64,75 |
| 4° | 131,68 |
| 5° | 214,62 |

Tabla 3.2: Primeras cinco frecuencias naturales experimentales de la comprobación n° 1

Análisis teórico

La ecuación 2.21 gobierna la vibración de la viga en estudio. Desarrollándola obtenemos la ecuación 3.1:

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) + \frac{m}{\rho AL} \beta L \cos(\beta L) \sinh(\beta L) - \frac{m}{\rho AL} \beta L \sin(\beta L) \cosh(\beta L) = -1 \quad (3.1)$$

Las frecuencias naturales del sistema tienen la forma mostrada en la ecuación 3.2:

$$f_n = \frac{(\beta L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (3.2)$$

Resolviendo la ecuación 3.1 para βL mediante métodos iterativos y sustituyendo en la ecuación 3.2, las primeras cinco frecuencias naturales se muestran en la tabla 3.3:

| Modo | Frecuencia natural (Hz) |
|------|-------------------------|
| 1° | 2,88 |
| 2° | 21,42 |
| 3° | 64,07 |
| 4° | 130,35 |
| 5° | 220,56 |

Tabla 3.3: Primeras cinco frecuencias naturales teóricas del sistema analizado en la comprobación n° 1

Análisis numérico mediante AMVI

Se procede a realizar el cálculo de las frecuencias naturales mediante el método de elementos finitos. El número de elementos empleado en el artículo [6] es 47.

Los resultados obtenidos mediante el programa AMVI se muestran en la imagen 3.30 y las primeras cinco frecuencias naturales en la tabla 3.4:

3.2. COMPROBACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA AMVI

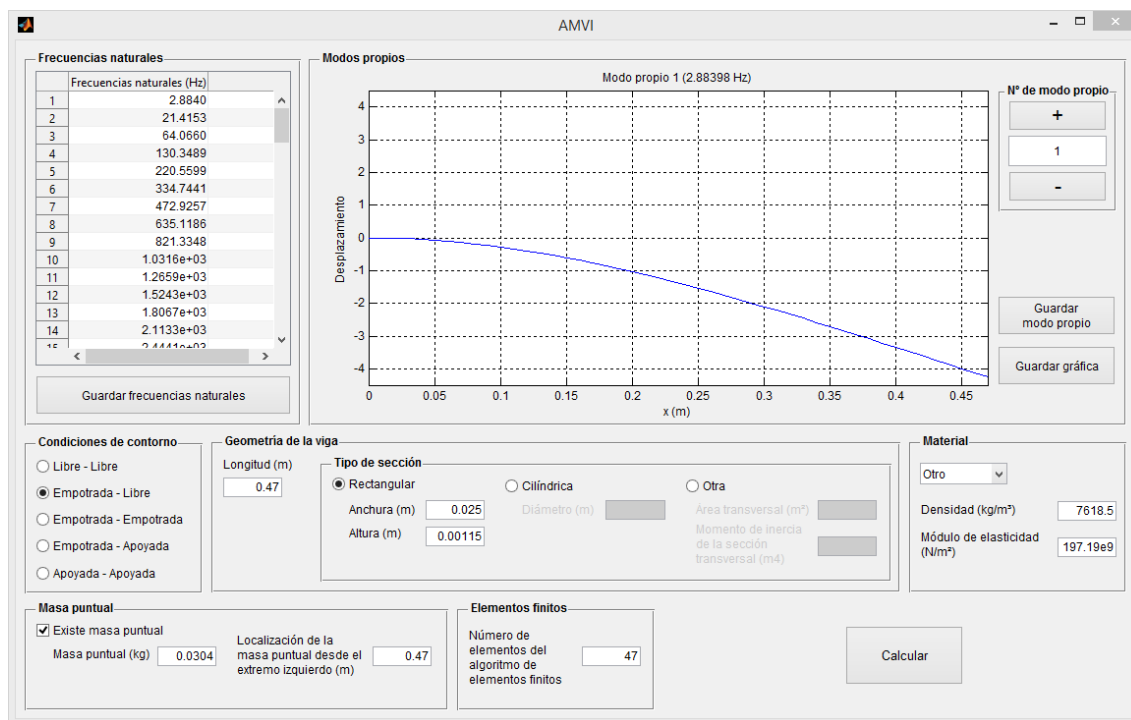


Figura 3.30: Valores de entrada y resultados del análisis numérico de la comprobación nº 1

Modo Frecuencia natural (Hz)

| | |
|----|----------|
| 1º | 2,884 |
| 2º | 21,4153 |
| 3º | 64,066 |
| 4º | 130,3489 |
| 5º | 220,5599 |

Tabla 3.4: Primeras cinco frecuencias naturales del sistema analizado obtenidas mediante AMVI para la comprobación nº 1

Comparación de resultados

Los distintos valores para las cinco primeras frecuencias naturales del sistema obtenidas mediante ensayo experimental, cálculo teórico y método de elementos finitos se muestran en la tabla 3.5:

| Modo | Experimental (Hz) | Teórico (Hz) | AMVI (Hz) |
|------|-------------------|--------------|-----------|
| 1º | 2,86 | 2,88 | 2,884 |
| 2º | 22,04 | 21,42 | 21,4153 |
| 3º | 64,75 | 64,07 | 64,066 |
| 4º | 131,68 | 130,35 | 130,3489 |
| 5º | 214,62 | 220,56 | 220,5599 |

Tabla 3.5: Comparación de las primeras cinco frecuencias naturales obtenidas mediante métodos experimental, teórico y AMVI

Los errores relativos del cálculo de las frecuencias naturales mediante el método de elementos finitos comparadas con las experimentales y teóricas se muestran en la tabla 3.6:

| Modo | Error experimental - AMVI (%) | Error teórico - AMVI (%) |
|------|----------------------------------|-----------------------------|
| 1º | 0,84 | 0,14 |
| 2º | 2,83 | 0,022 |
| 3º | 1,06 | 0,0062 |
| 4º | 1,01 | 0,00084 |
| 5º | 2,77 | 0,000045 |

Tabla 3.6: Errores relativos en el cálculo de las frecuencias naturales mediante AMVI

De la observación de las tablas 3.5 y 3.6, se puede concluir que el algoritmo de cálculo de frecuencias naturales del programa AMVI aproxima satisfactoriamente el comportamiento real del sistema, ya que el error relativo en relación con los valores experimentales se sitúa alrededor del 1 %, siendo el error máximo 2,83 % en la segunda frecuencia natural. Dicho margen de error puede explicarse mediante el amortiguamiento despreciado en el cálculo realizado por el programa AMVI.

El error existente relativo al cálculo teórico y a los resultados del programa AMVI es despreciable, ya que el máximo valor del mismo es 0,14 %, localizándose en la primera frecuencia natural, lo que no supone una diferencia significativa en magnitud. Aún siendo poco significativo, dicho error puede reducirse aumentando el número de elementos finitos en el cálculo.

3.2.2. Comprobación nº 2

Análisis experimental

El montaje ensayado en el artículo [5] se muestra en la figura 3.31:

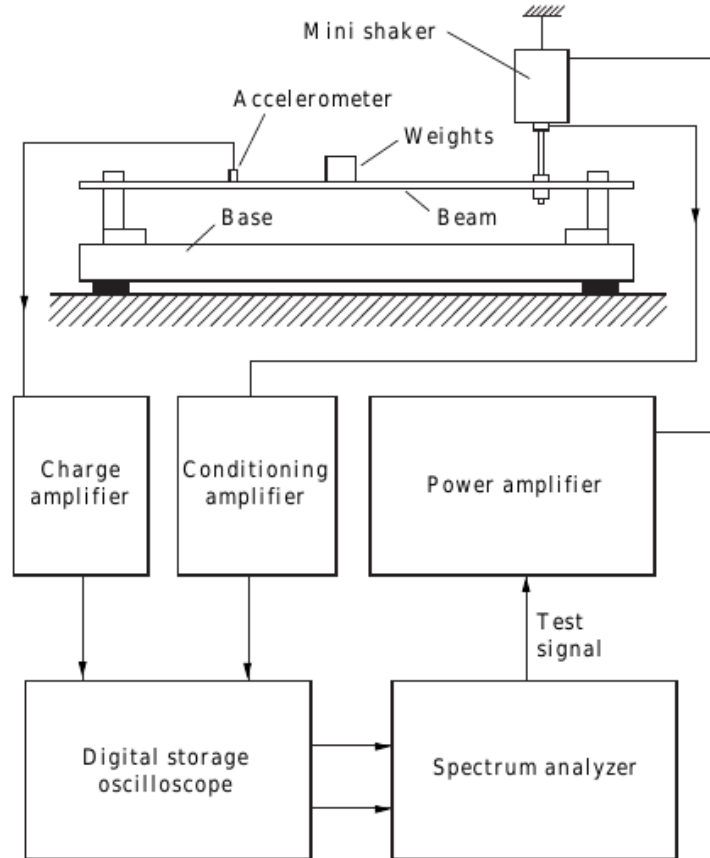


Figura 3.31: Montaje experimental de la viga de la comprobación n° 2

Se experimenta una viga de sección constante con extremos empotrados y masa puntual sobre ella, con las propiedades mostradas en la tabla 3.7:

Comprobación n° 2

| | |
|---|------------------------|
| Longitud (L) | 1 m |
| Módulo de Young (E) | 207 GPa |
| Densidad (ρ) | 7810 kg/m ³ |
| Esbeltez flexional ($s_r = \sqrt{AL^2/I_y}$) | 727 |
| Relación de masa ($\alpha = \frac{M}{\rho AL}$) | 0,4 |

Tabla 3.7: Propiedades de la viga analizada en [5]

donde A es el área de la sección transversal de la viga, I_y es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y (ver figura 2.8) y M es la masa de la masa puntual.

Las primeras 2 frecuencias naturales para varias relaciones de posición de la masa puntual η , siendo $\eta = a/L$ y a la posición de la masa puntual desde el extremo izquierdo, se muestran en la tabla 3.8:

| Datos experimentales | | |
|----------------------|------------|------------|
| η | f_1 (Hz) | f_2 (Hz) |
| 0 | 25,15 | 69,25 |
| 0,1 | 23,5 | 65 |
| 0,3 | 18 | 54,5 |
| 0,5 | 17 | 70 |

Tabla 3.8: Resultados experimentales de la comprobación n° 2

Análisis teórico

Antes de proceder a realizar el cálculo teórico de las frecuencias naturales es necesario obtener los valores de I_y , A y M .

Para ello, suponiendo la viga estudiada como una viga de sección cuadrada, los valores arriba indicados serán los de la tabla 3.9:

| Datos experimentales adicionales | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| I_y | $4,278 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$ |
| A | $2,266 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ |
| M | $0,0708 \text{ kg}$ |

Tabla 3.9: Valores de I_y , A y M de la viga ensayada

Se obtienen los valores teóricos de las frecuencias fundamentales de la viga biempotrada ensayada con masa M , situada en distintas posiciones definidas por η . Los resultados se muestran en la tabla 3.10:

| Datos teóricos | | |
|----------------|-----------|------------|
| η_i | β_i | f_1 (Hz) |
| 0 | 4,73 | 25,189 |
| 0,1 | 4,713 | 25,009 |
| 0,3 | 4,251 | 20,346 |
| 0,5 | 3,964 | 17,691 |

Tabla 3.10: Valores teóricos de la frecuencia fundamental de la viga 3.31

Análisis numérico mediante AMVI

En las figuras 3.32, 3.33, 3.34 y 3.35 se muestran los cálculos de las frecuencias naturales mediante el programa AMVI:

3.2. COMPROBACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA AMVI

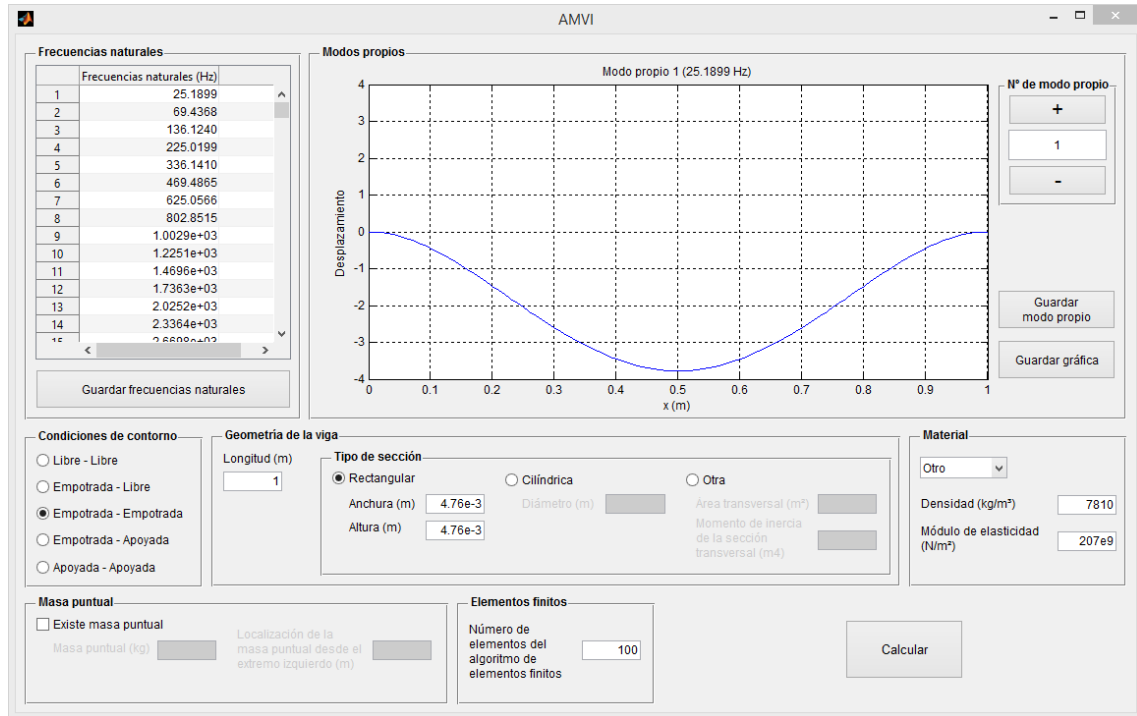


Figura 3.32: Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0$ para la comprobación n° 2

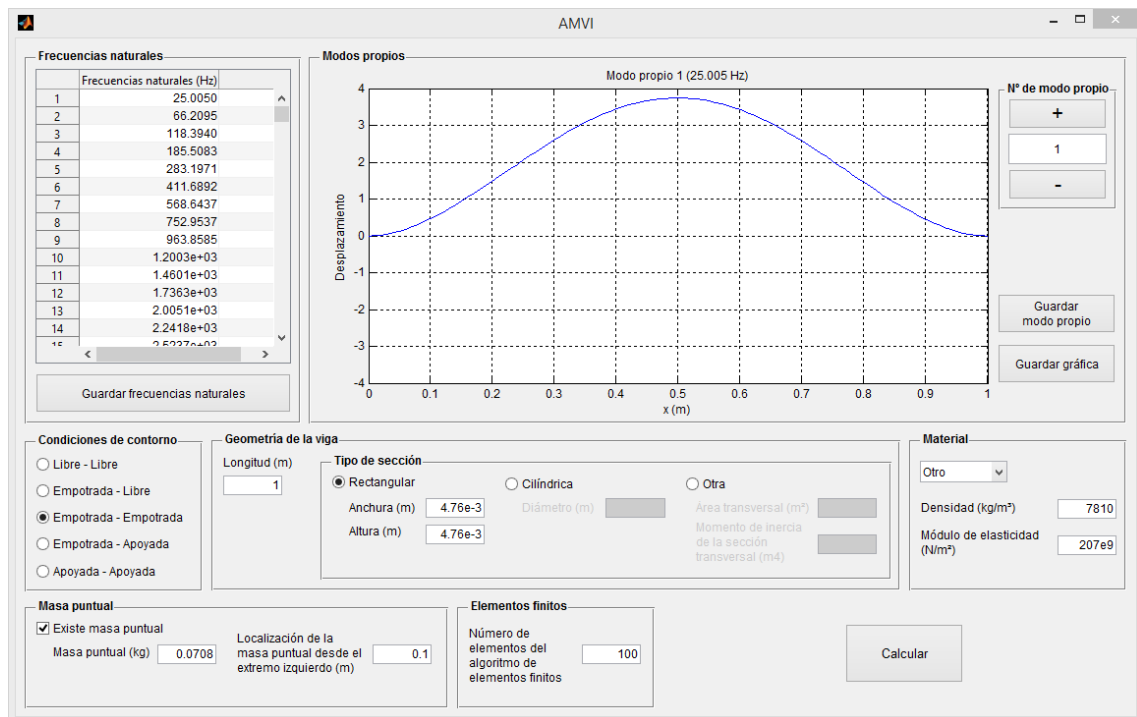


Figura 3.33: Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,1$ para la comprobación n° 2

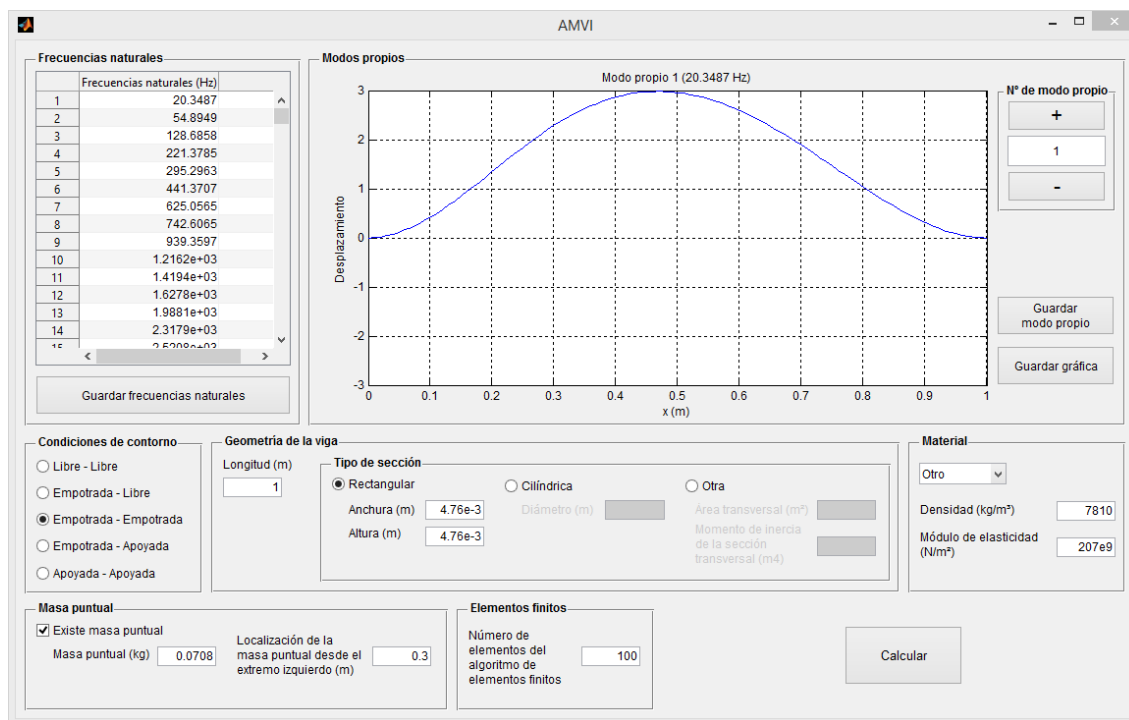


Figura 3.34: Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,3$ para la comprobación nº 2

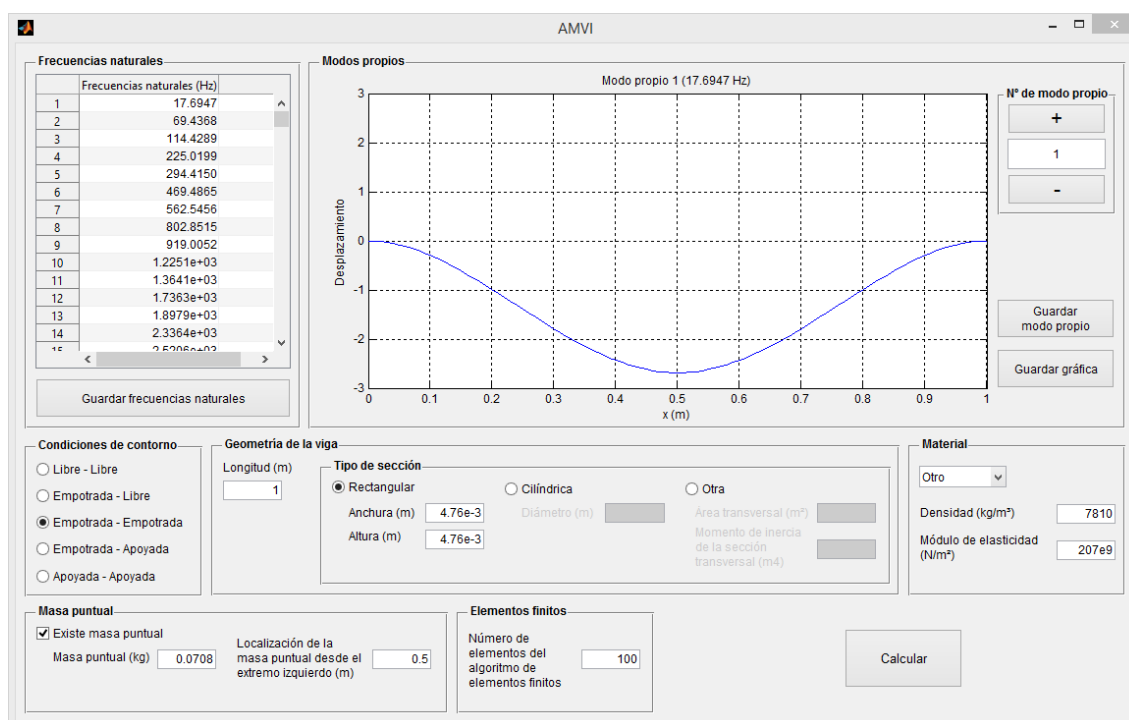


Figura 3.35: Cálculo de las frecuencias naturales en AMVI con $\eta = 0,5$ para la comprobación nº 2

Las primeras dos frecuencias naturales de cada sistema definido por el parámetro η se muestran en la tabla 3.11:

| Resultados AMVI | | |
|-----------------|------------|------------|
| η | f_1 (Hz) | f_2 (Hz) |
| 0 | 25,19 | 69,44 |
| 0,1 | 25,01 | 66,21 |
| 0,3 | 20,35 | 54,89 |
| 0,5 | 17,89 | 69,44 |

Tabla 3.11: Resultados obtenidos por el programa AMVI de los diferentes sistemas experimentales en la comprobación n° 2

Comprobación de resultados

En la tabla 3.12 se muestran, a modo de resumen, las frecuencias naturales experimentales, teóricas y numéricas obtenidas en los apartados anteriores:

| η | f_n | Experimental (Hz) | Teórico (Hz) | AMVI (Hz) |
|--------|-------|-------------------|--------------|-----------|
| 0 | f_1 | 25, 15 | 25, 189 | 25, 19 |
| | f_2 | 69, 25 | — | 69, 44 |
| 0,1 | f_1 | 23, 5 | 25, 009 | 25, 01 |
| | f_2 | 65 | — | 66, 21 |
| 0,3 | f_1 | 18 | 20, 346 | 20, 35 |
| | f_2 | 54, 5 | — | 54, 89 |
| 0,5 | f_1 | 17 | 17, 691 | 17, 89 |
| | f_2 | 70 | — | 69, 44 |

Tabla 3.12: Comparación de las frecuencias naturales obtenidas mediante métodos experimental, teórico y AMVI de la comprobación 2

Los errores relativos cometidos a la hora de obtener los valores numéricos con respecto a los valores experimentales de [5] y con respecto a los valores teóricos del mismo se muestran en la tabla 3.13:

| η | f_n | Error | Error |
|--------|-------|-------------------------|--------------------|
| | | Experimental - AMVI (%) | Teórico - AMVI (%) |
| 0 | f_1 | 0,16 | 0,004 |
| | f_2 | 0,27 | — |
| 0,1 | f_1 | 6,43 | 0,004 |
| | f_2 | 1,86 | — |
| 0,3 | f_1 | 13,06 | 0,02 |
| | f_2 | 0,72 | — |
| 0,5 | f_1 | 5,24 | 1,12 |
| | f_2 | 0,8 | — |

Tabla 3.13: Errores relativos entre las frecuencias naturales obtenidas mediante método experimental y numérico (AMVI) y método teórico y numérico (AMVI) de la comprobación 2

Los errores relativos observados en la tabla 3.13 son lo suficientemente bajos como para afirmar que los resultados numéricos obtenidos mediante el programa AMVI son una aproximación satisfactoria de los resultados del documento [5]. De igual forma, los valores numéricos obtenidos son prácticamente idénticos a los calculados teóricamente.

Las mayores discrepancias se producen con los datos experimentales. El error experimental - AMVI de la frecuencia f_1 de $\eta = 0,1$, el de f_1 de $\eta = 0,3$ y el de f_1 de $\eta = 0,5$, son, respectivamente, 6,43 %, 13,06 % y 5,24 %. Dichos errores son los de mayor magnitud. Las posibles causas de los mismos pueden ser la obtención aproximada de las frecuencias naturales experimentales a partir de gráficas en el documento [5], el proceso propio de obtención de los datos experimentales sujeto a posibles errores, a las simplificaciones realizadas en la teoría de Euler-Bernoulli de vigas esbeltas o al número de elementos finitos empleados en el cálculo numérico del programa AMVI.

3.3. Ejemplos

Una vez desarrolladas la descripción de la interfaz del programa y la demostración de su correcto funcionamiento, en la presente sección se procede a mostrar tres ejemplos del uso del programa AMVI.

3.3.1. Ejemplo 1: viga de aluminio

Los valores del problema a resolver se muestran en la tabla 3.14:

| Ejemplo 1 | |
|-------------------------|---|
| Condiciones de contorno | Empotrado - Libre |
| Longitud viga | 0,5 m |
| Sección | Cuadrada 0,02 x 0,01 m |
| Material | Aluminio $\rho_{Al} = 2698,4 \text{ kg/m}^3$ $E_{Al} = 69 \text{e9 Pa}$ |
| Masa puntual | No |
| Nº elementos finitos | 100 |

Tabla 3.14: Propiedades del ejemplo 1

Solución teórica

Las condiciones de contorno del ejemplo 1 son extremos empotrado y libre. Las expresiones de las frecuencias naturales para una viga en voladizo, obtenidas por la teoría de Euler-Bernoulli, han sido descritas en la sección 2.2.1.

Las primeras 5 frecuencias naturales, calculadas por el método teórico, se muestran en la tabla 3.15:

| n | f_n | f_n (Hz) |
|----------|---|------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{3,5156}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 32,67 |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,034}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 204,77 |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,6973}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 573,25 |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,9019}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 1123,56 |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{199,8596}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 1857,32 |

Tabla 3.15: Primeras 5 frecuencias naturales teóricas de la viga del ejemplo 1

Mediante la expresión 2.77 se obtienen los modos propios de vibración normalizados teóricos. Se representan en las figuras 3.36 y 3.37:

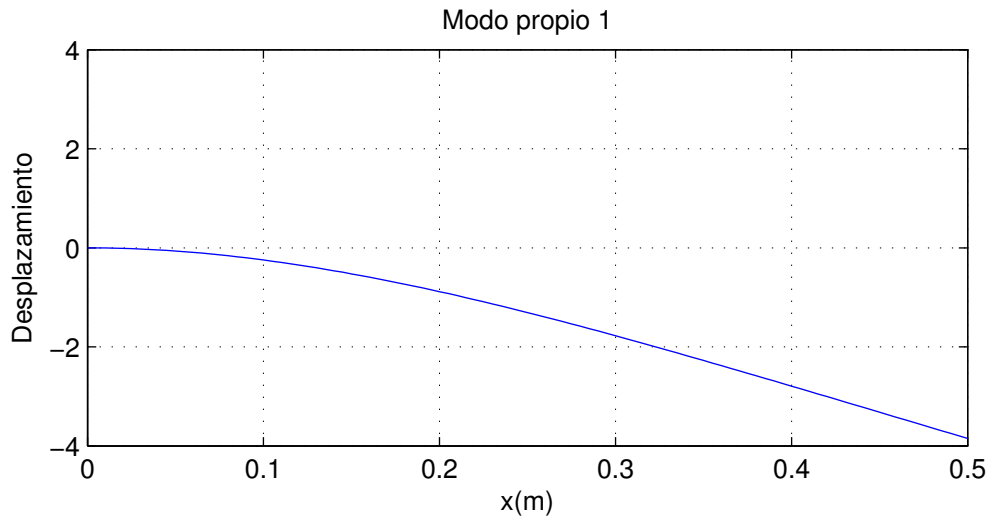
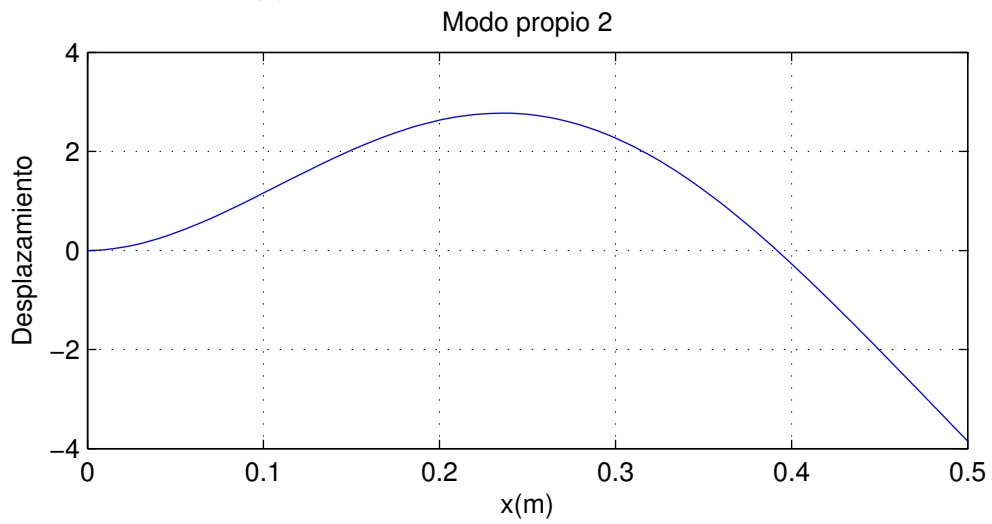
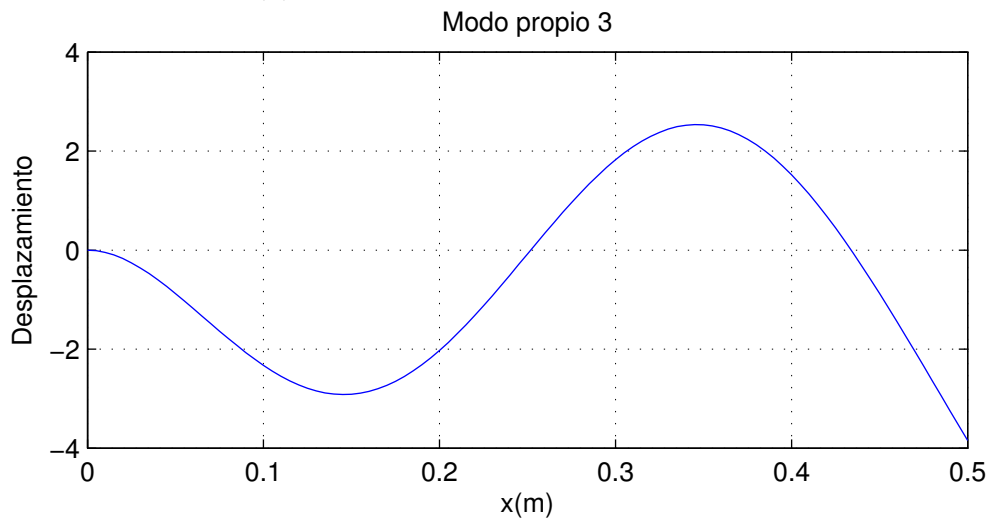
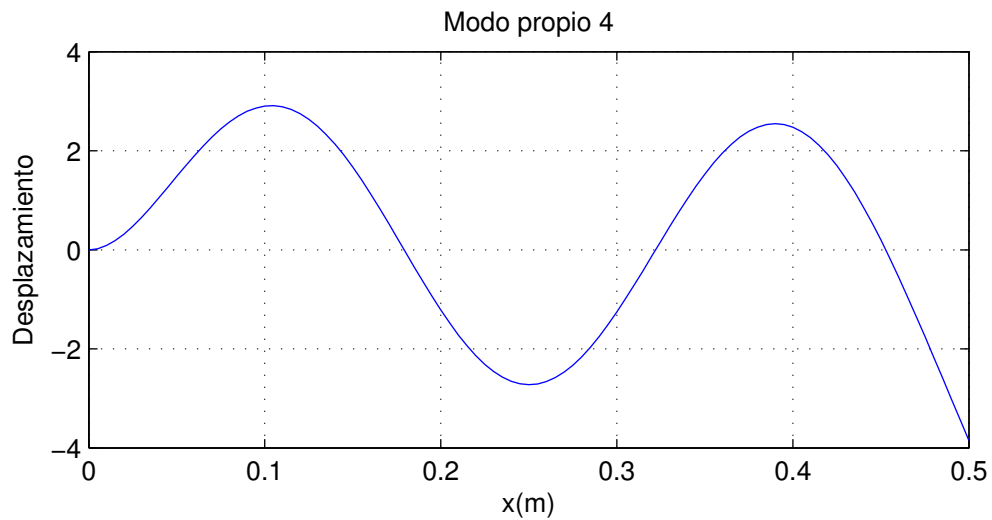
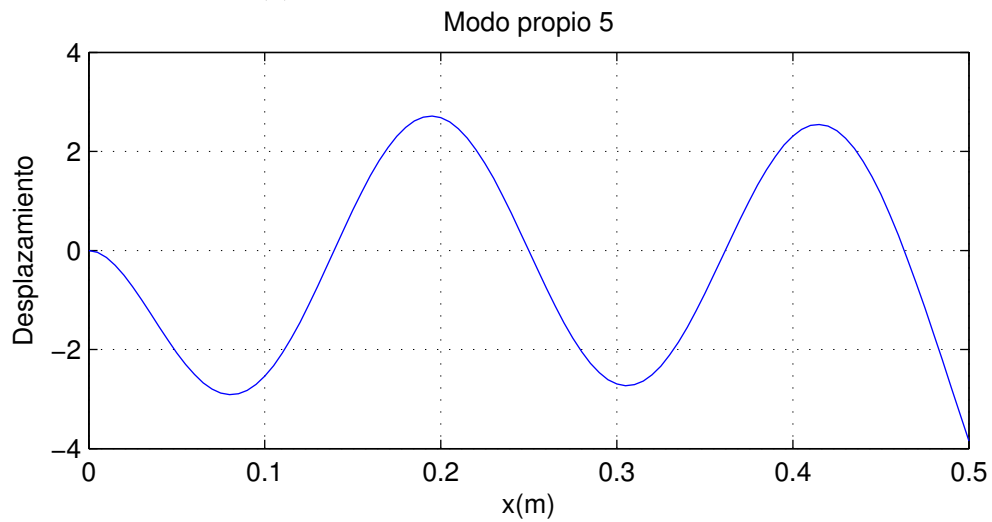
(a) 1^{er} modo propio normalizado teórico(b) 2^o modo propio normalizado teórico(c) 3^{er} modo propio normalizado teórico

Figura 3.36: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (continuación en la figura 3.37)



(a) 4º modo propio normalizado teórico



(b) 5º modo propio normalizado teórico

Figura 3.37: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (continuación de la figura 3.36)

Solución del programa AMVI

Los valores se introducen en el programa AMVI tal como se indica en la figura 3.38:

Frecuencias naturales

| Frecuencias naturales (Hz) |
|----------------------------|
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |

Guardar frecuencias naturales

Modos propios

Gráfico de Modos propios (eje Y: 0 a 1, eje X: 0 a 1). Botón: Guardar gráfica.

Condiciones de contorno

☐ Libre - Libre
☒ Empotrada - Libre
☐ Empotrada - Empotrada
☐ Empotrada - Apoyada
☐ Apoyada - Apoyada

Geometría de la viga

Longitud (m): 0.5

Tipo de sección

☒ Rectangular: Anchura (m): 0.02, Altura (m): 0.01
☐ Cilíndrica: Diámetro (m):
☐ Otra: Área transversal (m²):, Momento de inercia de la sección transversal (m⁴):

Material

Aluminio

Densidad (kg/m³): 2698.4

Módulo de elasticidad (N/m²): 69.e9

Masa puntual

☐ Existe masa puntual

Masa puntual (kg):

Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m):

Elementos finitos

Número de elementos del algoritmo de elementos finitos: 100

Calcular

Figura 3.38: Datos introducidos del ejemplo 1 en AMVI

Para obtener los resultados se pulsa el botón “Calcular”. Los resultados se muestran en la parte superior de la interfaz (figura 3.39):

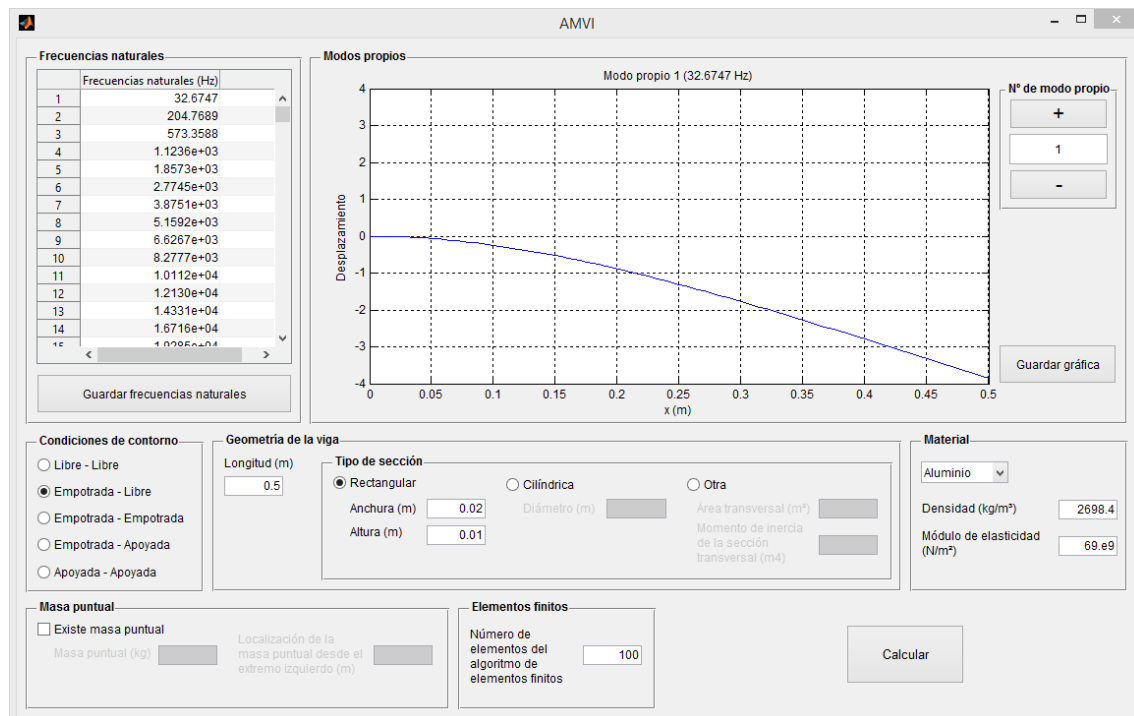


Figura 3.39: Resultados del ejemplo 1 en AMVI

Se muestran las 5 primeras frecuencias naturales en la tabla 3.16:

| Modo | $f_n(\text{Hz})$ |
|------|------------------|
| 1 | 32.67 |
| 2 | 204.77 |
| 3 | 573.36 |
| 4 | 1123.55 |
| 5 | 1857.32 |

Tabla 3.16: Primeras 5 frecuencias naturales numéricas del ejemplo 1

Los modos propios normalizados de vibración están representados en las figuras 3.40 y 3.41:

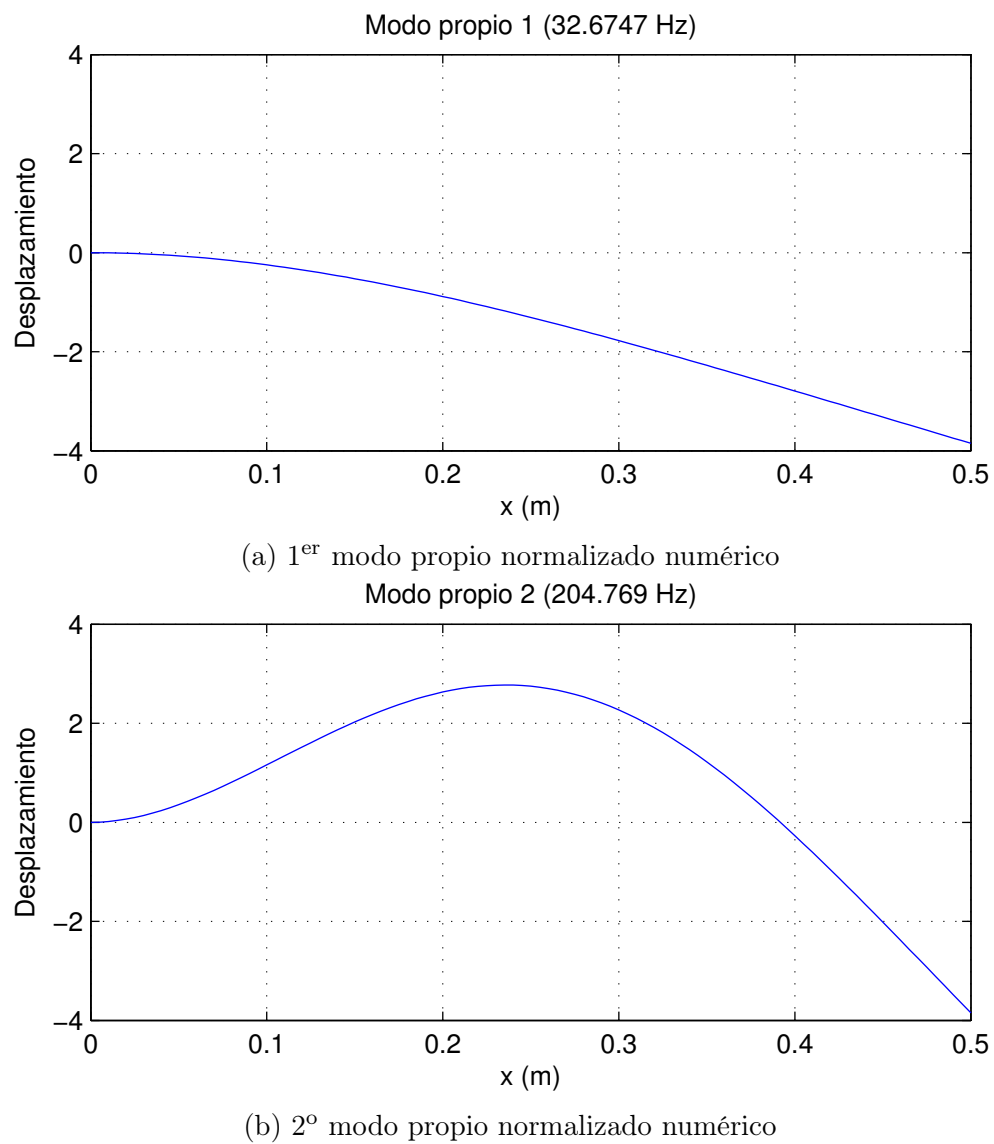


Figura 3.40: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos mediante AMVI (continúa en la figura 3.41)

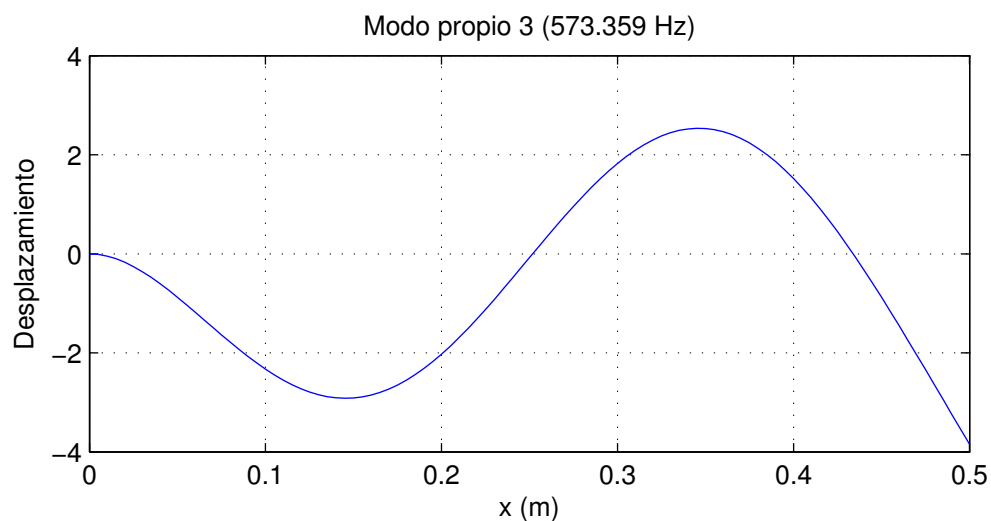
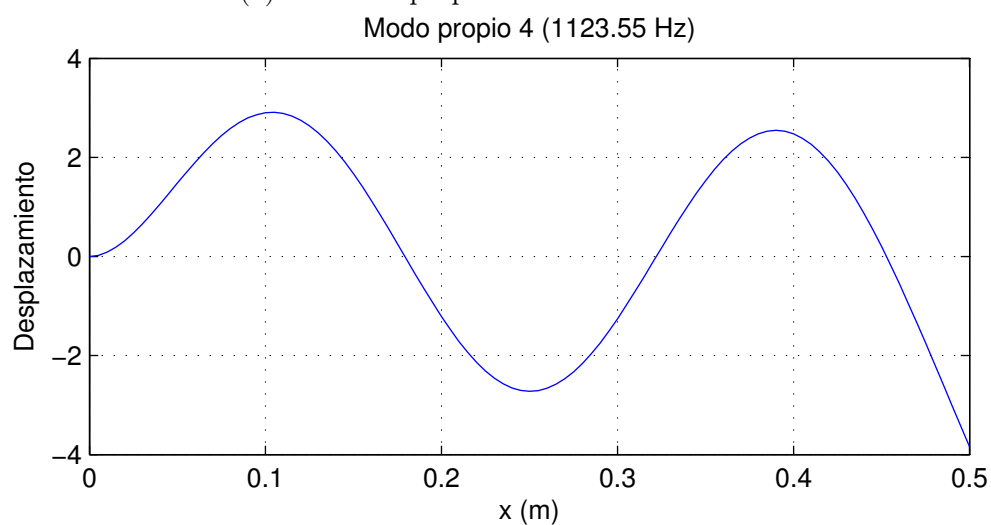
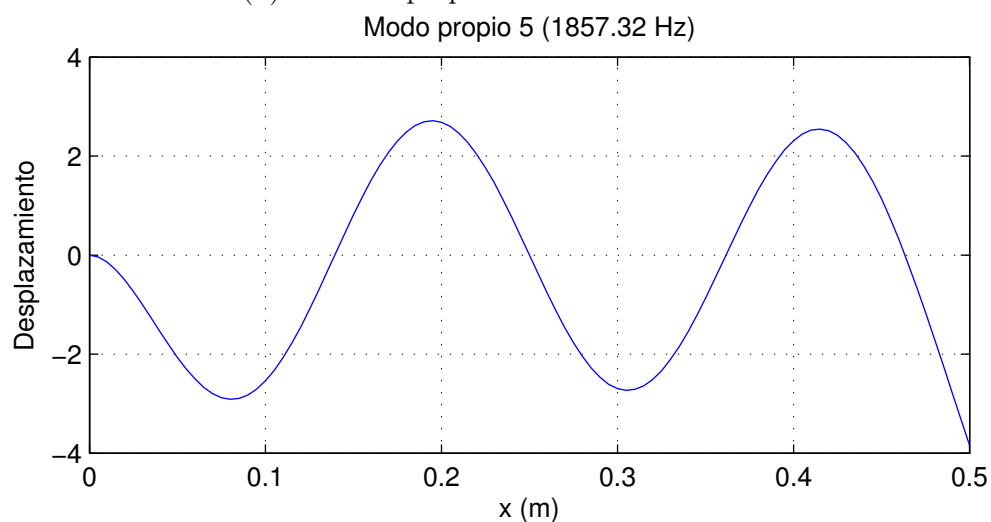
(a) 3^{er} modo propio normalizado numérico(b) 4^o modo propio normalizado numérico(c) 5^o modo propio normalizado numérico

Figura 3.41: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos mediante AMVI (continuación de la figura 3.40)

Observaciones

En la tabla 3.17 se comparan los resultados teóricos y los obtenidos por el programa AMVI:

| Modo | f_n teórica (Hz) | f_n AMVI (Hz) |
|------|--------------------|-----------------|
| 1 | 32,67 | 32,67 |
| 2 | 204,77 | 204,77 |
| 3 | 573,25 | 573,36 |
| 4 | 1123,56 | 1123,55 |
| 5 | 1857,32 | 1857,32 |

Tabla 3.17: Comparación de las primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 1 por los métodos teórico y numérico

Puede observarse que los resultados teóricos y numéricos de la tabla 3.17 son prácticamente idénticos.

En las figuras 3.42 y 3.43 se comparan los modos propios de vibración teóricos y numéricos:

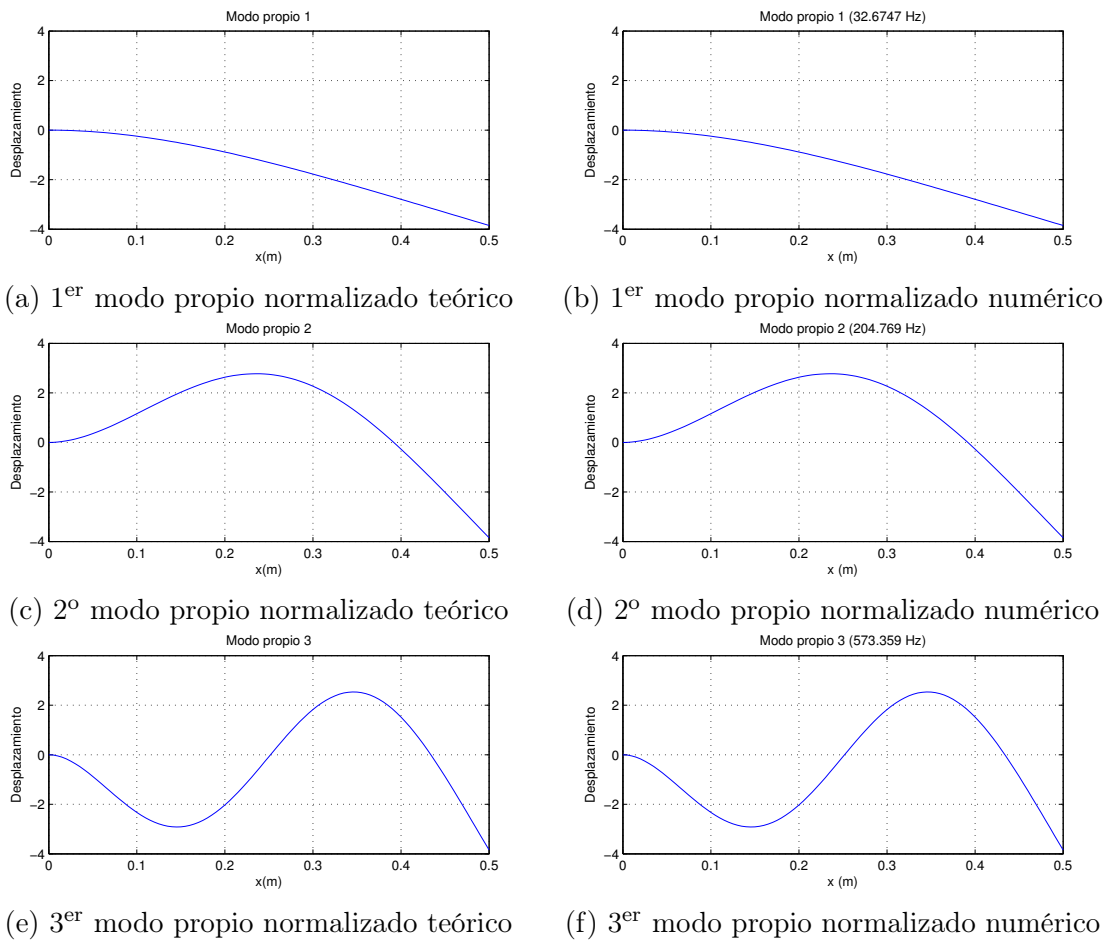


Figura 3.42: Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación en la figura 3.43)

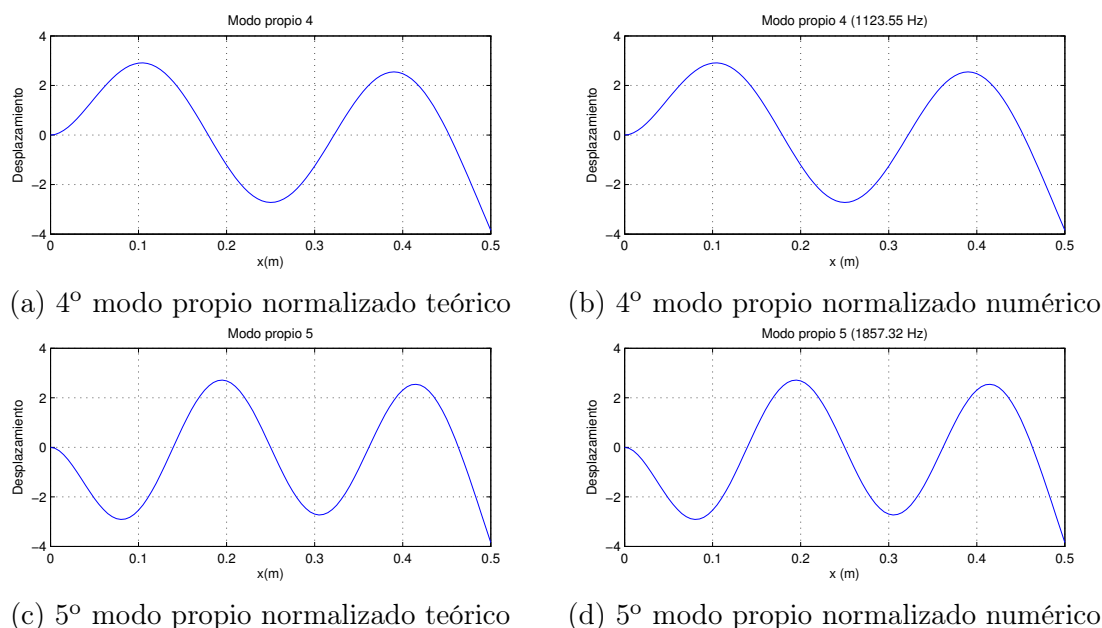


Figura 3.43: Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación de la figura 3.42)

Al igual que en la tabla 3.17, puede afirmarse que no hay diferencias perceptibles entre los modos propios de vibración teóricos y numéricos de las figuras 3.42 y 3.43.

3.3.2. Ejemplo 2: viga de cobre

El ejemplo 2 sólo contiene el cálculo numérico (cálculo con el programa AMVI) de las frecuencias naturales y modos propios normalizados de vibración de la viga con las propiedades mostradas en la tabla 3.18:

| Ejemplo 2 | |
|-------------------------|--------------------------------------|
| Condiciones de contorno | Apoyado - Apoyado |
| Longitud viga | 1 m |
| Sección | Cilíndrica |
| | $\varnothing 0,025$ m |
| Material | Cobre |
| | $\rho_{Cu} = 8960$ kg/m ³ |
| | $E_{Cu} = 117e9$ Pa |
| Masa puntual | 0,05 kg |
| Posición masa puntual | 0,74 m |
| Nº elementos finitos | 200 |

Tabla 3.18: Propiedades del ejemplo 2

La tabla 3.19 contiene las primeras 5 frecuencias naturales obtenidas mediante el programa AMVI:

| Modo | f_n (Hz) |
|------|------------|
| 1 | 35,264 |
| 2 | 140,34 |
| 3 | 317,873 |
| 4 | 567,523 |
| 5 | 880,505 |

Tabla 3.19: Primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 2

Los 5 modos propios de vibración correspondientes a las frecuencias naturales de la tabla 3.19 están representados en las figuras 3.44 y 3.45:

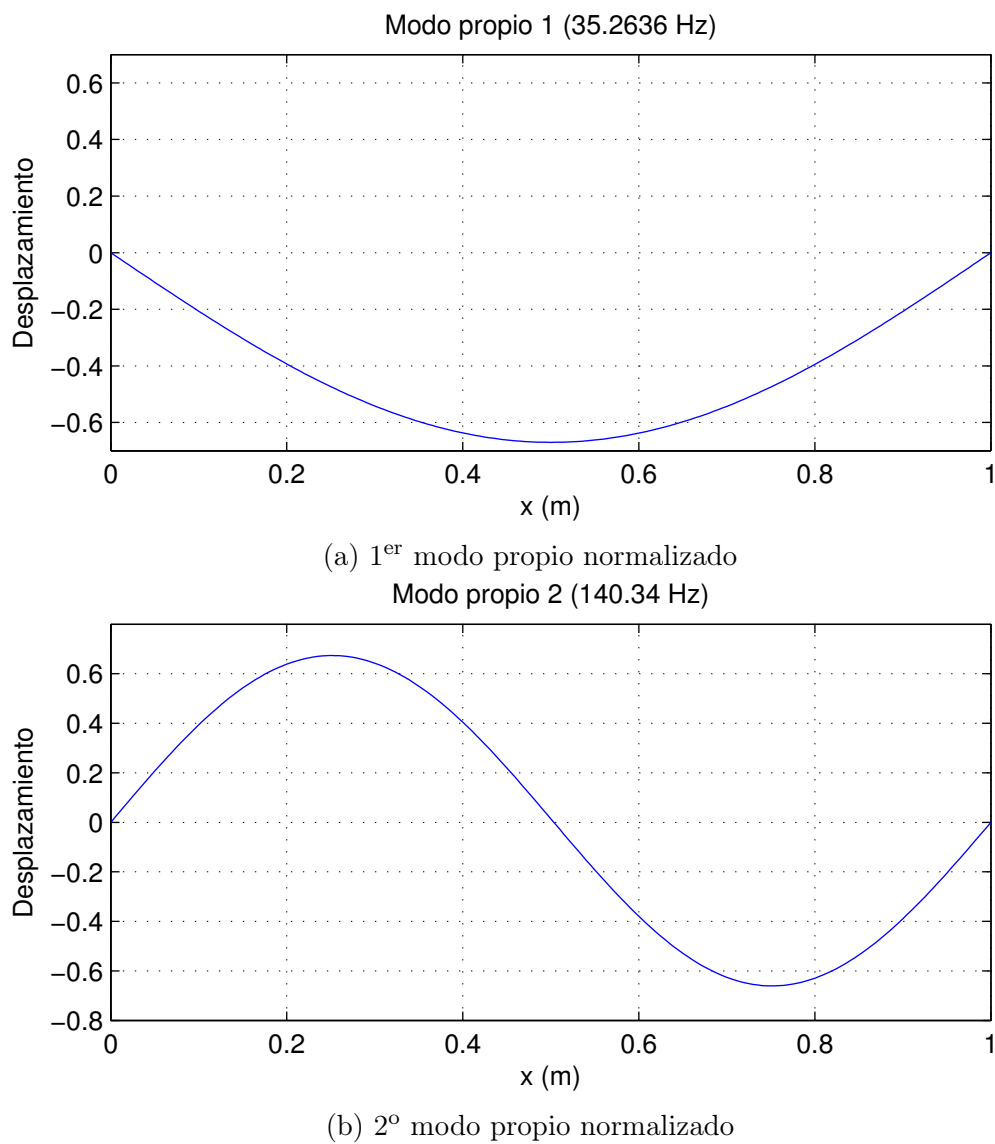


Figura 3.44: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 2 (continúa en 3.45)

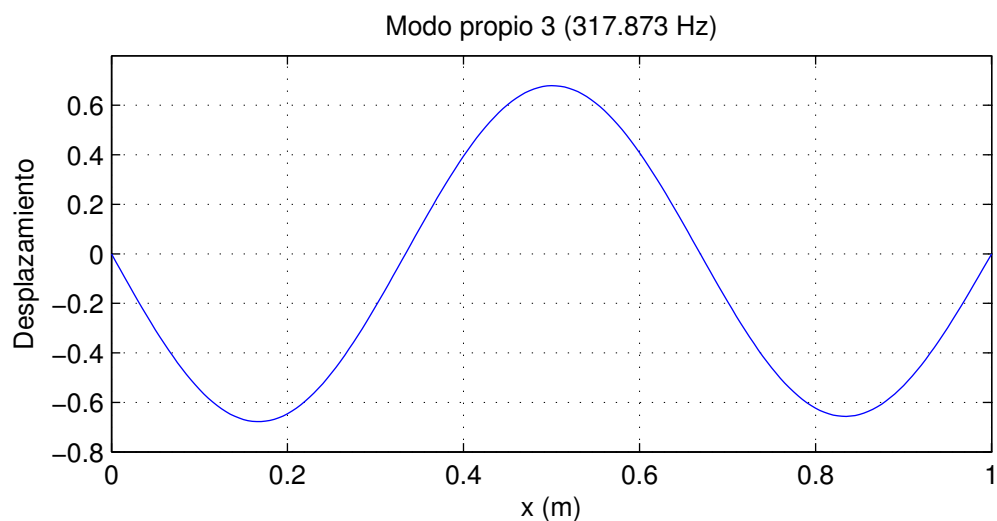
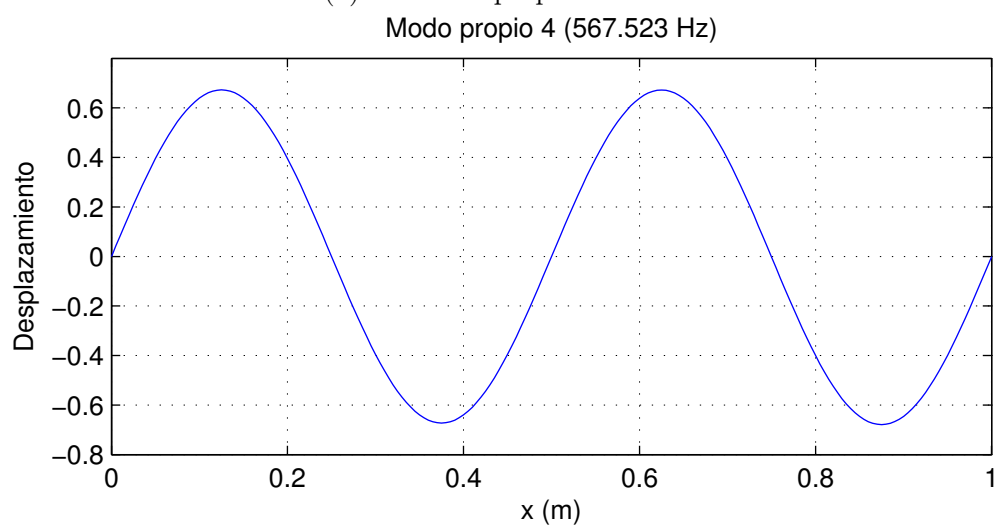
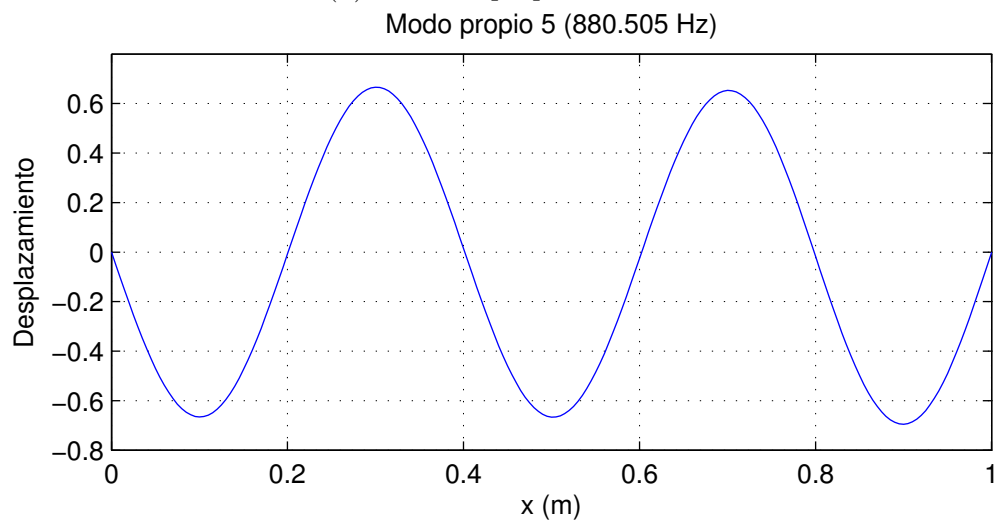
(a) 3^{er} modo propio normalizado(b) 4^o modo propio normalizado(c) 5^o modo propio normalizado

Figura 3.45: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 2 (continuación de 3.44)

3.3.3. Ejemplo 3: viga de acero

Se considera la viga cuyas propiedades y sección se especifican en la tabla 3.20 y figura 3.46, respectivamente:

| Ejemplo 3 | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| Condiciones de contorno | Empotrado - Apoyado |
| Longitud viga | 2 m |
| Sección | IPE 200 |
| | $A_t = 28,5 \text{ mm}^2$ |
| | $I_y = 1943 \text{e4 mm}^4$ |
| Material | Acero |
| | $\rho_{Ac} = 7850 \text{ kg/m}^3$ |
| | $E_{Ac} = 210 \text{e9 Pa}$ |
| Masa puntual | No |
| Nº elementos finitos | 300 |

Tabla 3.20: Propiedades del ejemplo 3

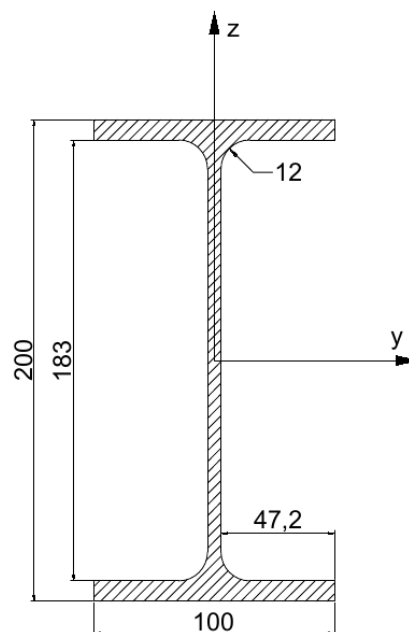


Figura 3.46: Sección de viga IPE200

Solución teórica

Mediante la teoría desarrollada en la sección 2.2.1 para una viga con extremos empotrado y apoyado, se obtienen las frecuencias naturales de la tabla 3.21:

| Modo | f_n (Hz) |
|------|------------|
| 1 | 2619,885 |
| 2 | 8490,157 |
| 3 | 17714,032 |
| 4 | 30292,043 |
| 5 | 46224,19 |

Tabla 3.21: Primeras 5 frecuencias naturales teóricas del ejemplo 3

Los modos propios de vibración calculados con la ecuación 2.77 se muestran en las figuras 3.47 y 3.48:

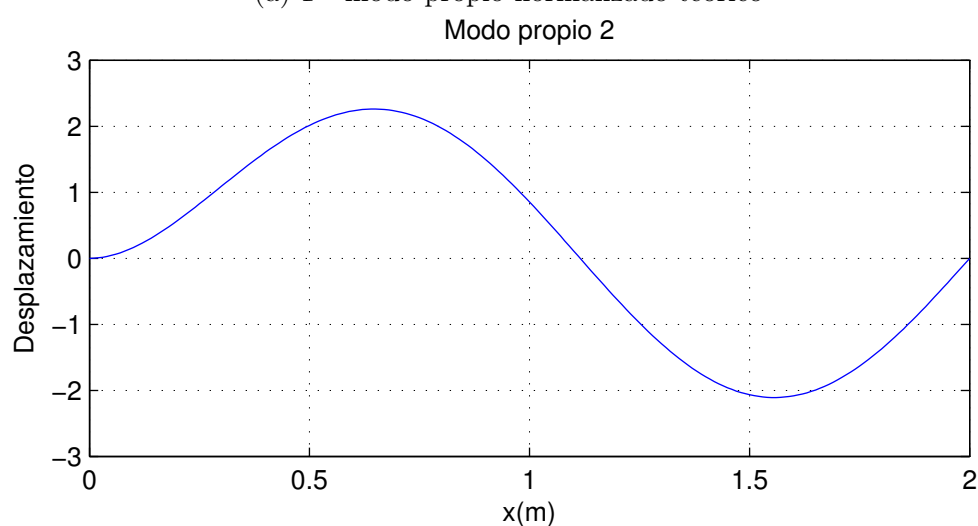
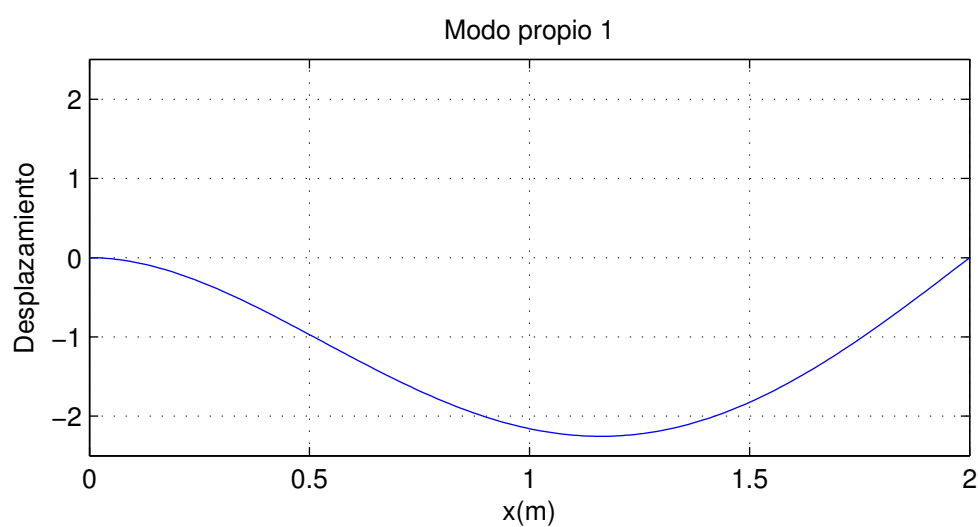


Figura 3.47: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 3 (continúa en la figura 3.48)

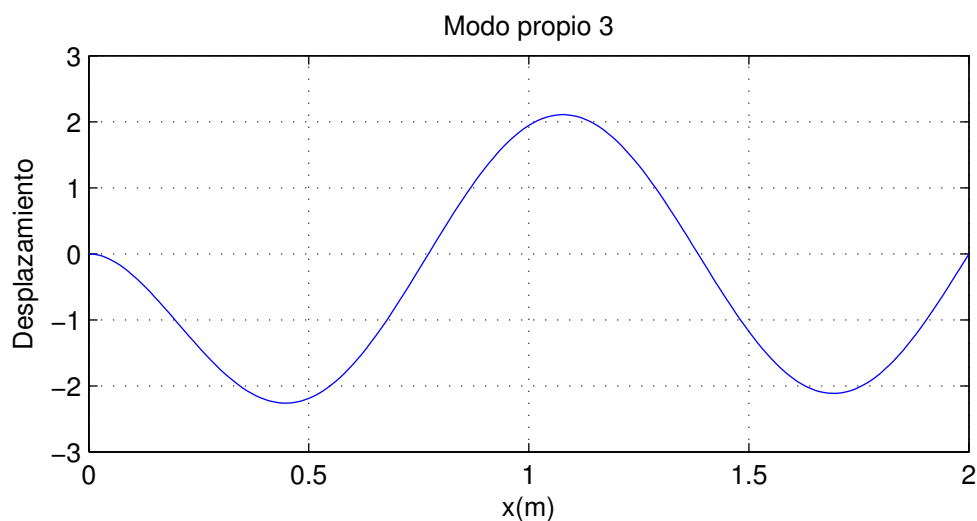
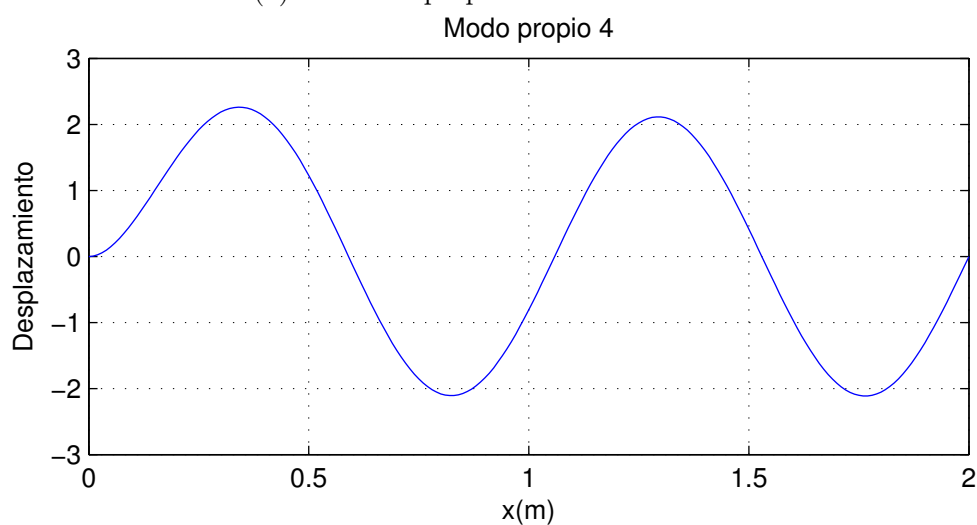
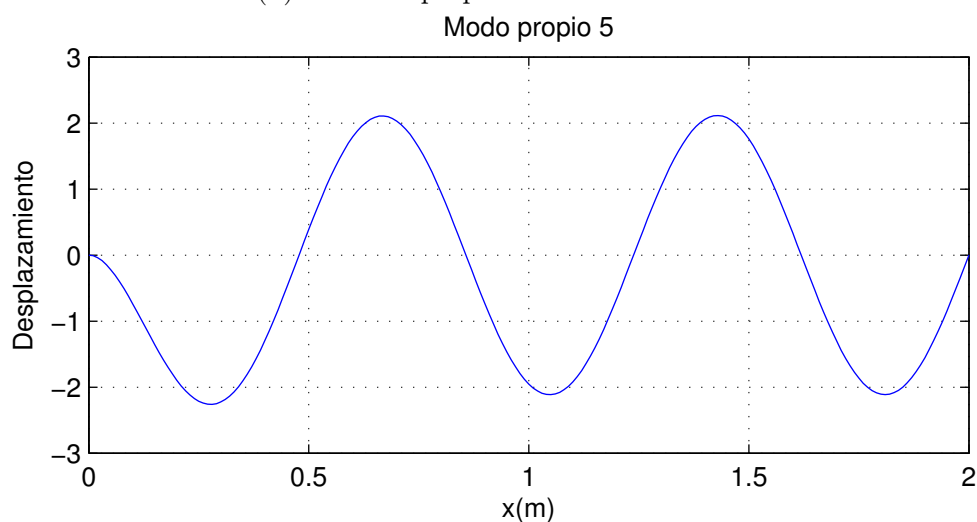
(a) 3^{er} modo propio normalizado teórico(b) 4^o modo propio normalizado teórico(c) 5^o modo propio normalizado teórico

Figura 3.48: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 3 (continuación de la figura 3.47)

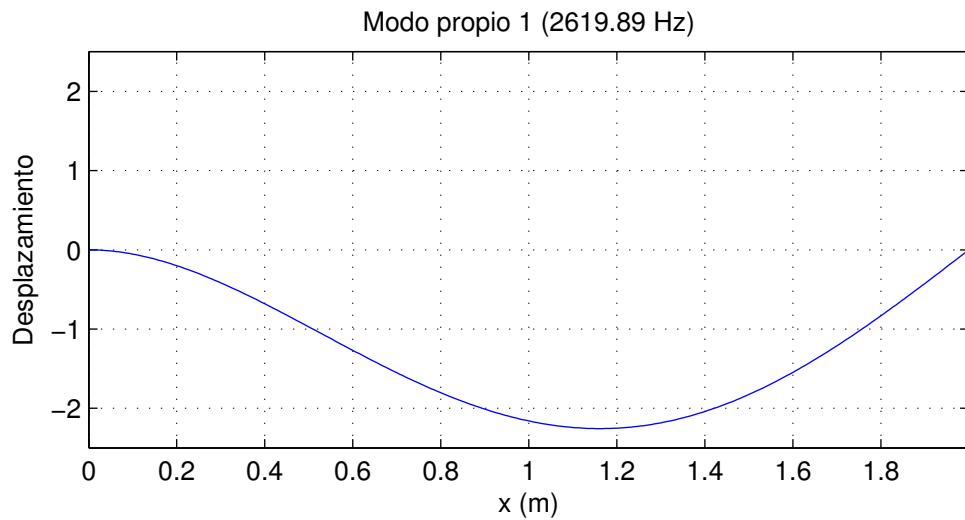
Solución del programa AMVI

El cálculo numérico de las 5 primeras frecuencias naturales del ejemplo 3 mediante el programa AMVI se muestran en la tabla 3.22:

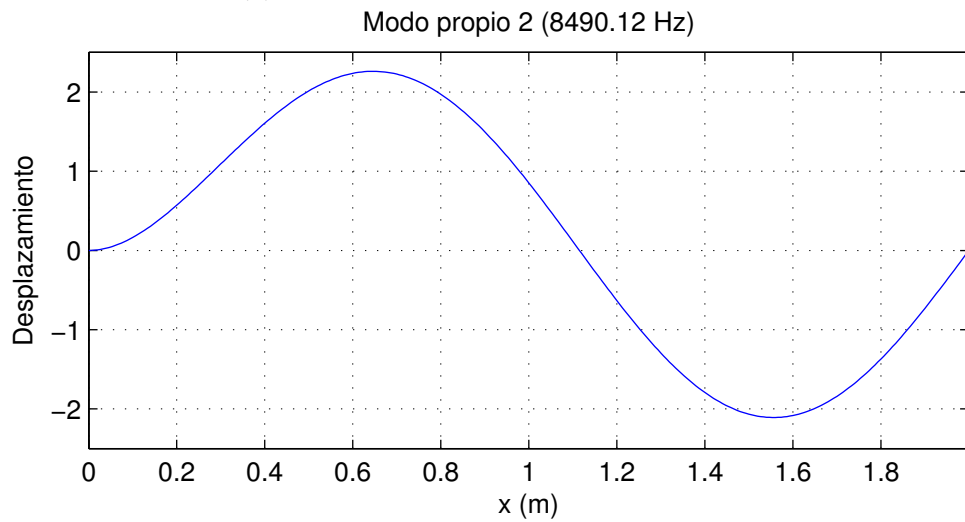
| Modo | f_n (Hz) |
|-------------|------------------------------|
| 1 | 2619,89 |
| 2 | 8490,117 |
| 3 | 17713,949 |
| 4 | 30291,902 |
| 5 | 46223,974 |

Tabla 3.22: Primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 3 obtenidas mediante AMVI

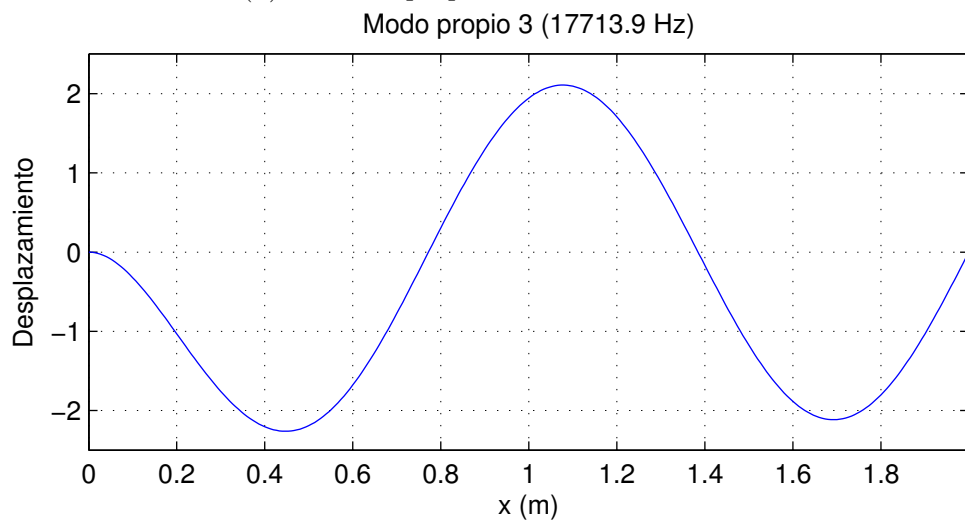
Los modos propios de vibración numéricos, correspondientes a las frecuencias naturales de la tabla 3.22, se representan en las figuras 3.49 y 3.50:



(a) 1^{er} modo propio normalizado numérico

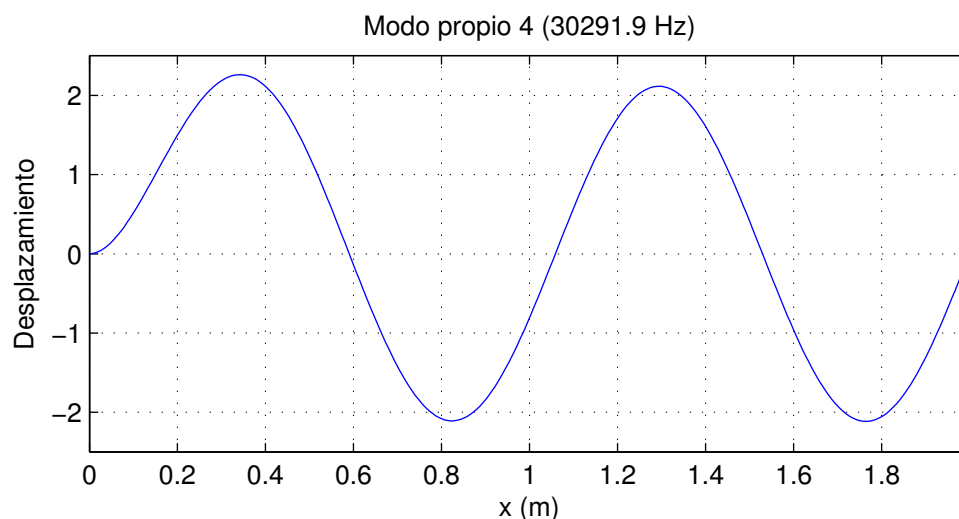


(b) 2^o modo propio normalizado numérico

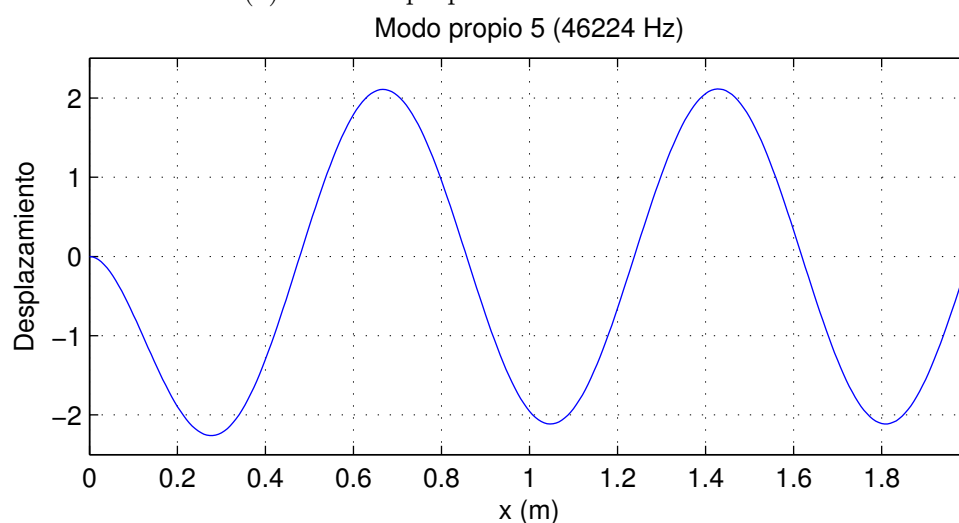


(c) 3^{er} modo propio normalizado numérico

Figura 3.49: 5 primeros modos propios normalizados numéricos del ejemplo 3 (continúa en la figura 3.50)



(a) 4º modo propio normalizado numérico



(b) 5º modo propio normalizado numérico

Figura 3.50: 5 primeros modos propios normalizados numéricos del ejemplo 3 (continuación de la figura 3.49)

Observaciones

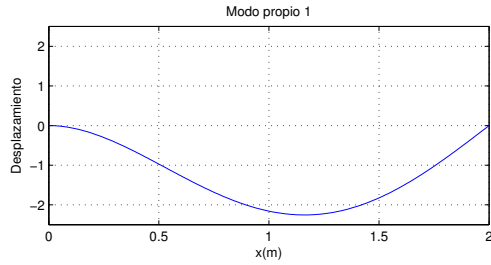
La tabla 3.23 compara los valores teóricos y los numéricos de las frecuencias naturales del ejemplo 3:

| Modo | f_n teórica (Hz) | f_n AMVI (Hz) |
|------|--------------------|-----------------|
| 1 | 2619,885 | 2619,89 |
| 2 | 8490,157 | 8490,117 |
| 3 | 17714,032 | 17713,949 |
| 4 | 30292,043 | 30291,902 |
| 5 | 46224,19 | 46223,974 |

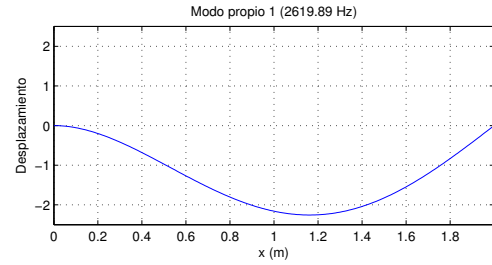
Tabla 3.23: Comparación de las primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 3 por los métodos teórico y numérico

Los valores teóricos y numéricos de las frecuencias naturales del ejemplo 3 son prácticamente idénticos.

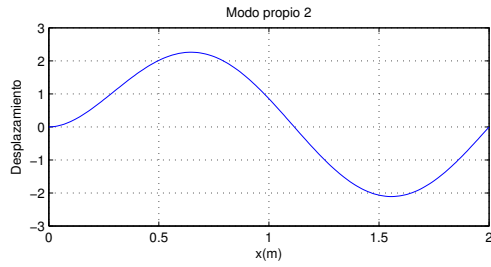
Se comparan los modos propios de vibración teóricos y numéricos del ejemplo 3 en la figura 3.51:



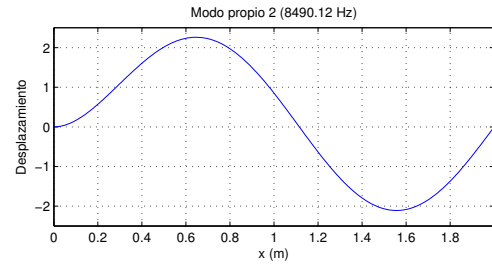
(a) 1^{er} modo propio normalizado teórico



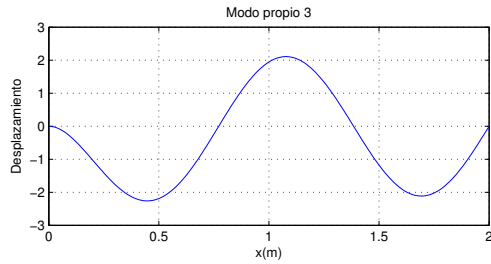
(b) 1^{er} modo propio normalizado numérico



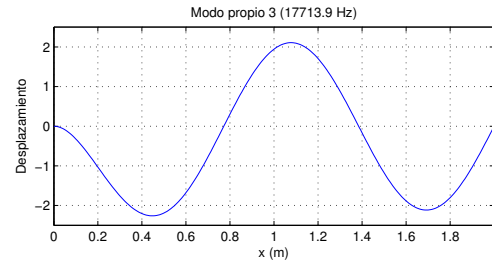
(c) 2º modo propio normalizado teórico



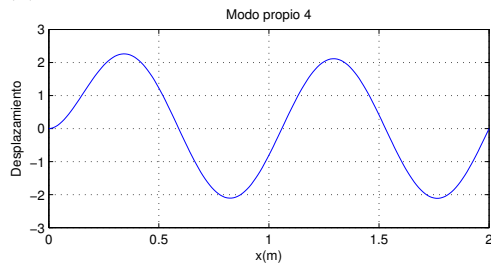
(d) 2º modo propio normalizado numérico



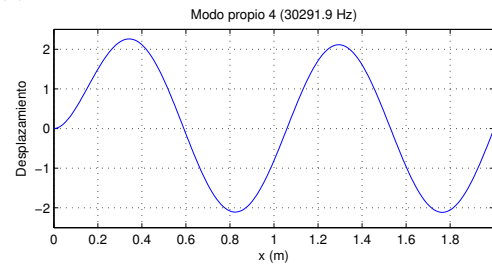
(e) 3^{er} modo propio normalizado teórico



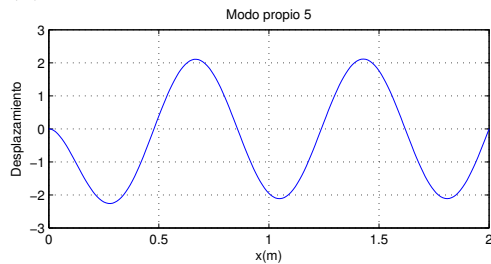
(f) 3^{er} modo propio normalizado numérico



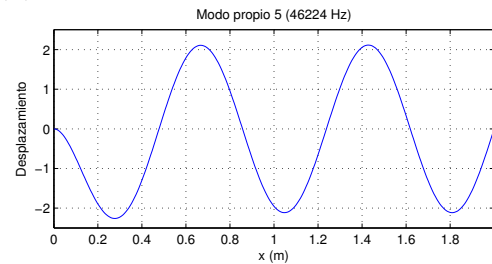
(g) 4º modo propio normalizado teórico



(h) 4º modo propio normalizado numérico



(i) 5º modo propio normalizado teórico



(j) 5º modo propio normalizado numérico

Figura 3.51: Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 3

De la observación de la figura 3.51, se observa que los modos propios teóricos y numéricos del ejemplo 3 son prácticamente idénticos, por lo que se deduce que la aproximación numérica del programa AMVI es correcta.

Capítulo 4

Guión de prácticas

Una vez mostrados la teoría, el desarrollo del programa AMVI, las comprobaciones de su funcionamiento y ejemplos de su empleo, se presenta en el capítulo 4 la memoria de la práctica de laboratorio “Análisis modal de vigas bajo distintas condiciones de contorno mediante la teoría de Euler-Bernoulli de vigas continuas”. Esta memoria está destinada para la asignatura “Vibraciones” de 4º curso de Grado en Ingeniería Mecánica.

Análisis modal de vigas bajo distintas condiciones de contorno mediante la teoría de Euler-Bernoulli de vigas continuas

Sergio Moreno López

Octubre 2014

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Teoría | 1 |
| 2.1. Vibración transversal | 2 |
| 2.1.1. Ecuación del movimiento | 2 |
| 2.1.2. Condiciones iniciales | 3 |
| 2.1.3. Vibración libre | 3 |
| 2.1.4. Condiciones de contorno | 4 |
| 2.2. Método de elementos finitos | 15 |
| 2.2.1. Ecuaciones de movimiento de un elemento | 15 |
| 2.2.2. Matriz de masa, matriz de rigidez y vector fuerza de un elemento viga | 16 |
| 2.2.3. Ecuaciones de movimiento del sistema de elementos finitos | 19 |
| 2.2.4. Incorporación de las condiciones de contorno | 20 |
| 2.2.5. Frecuencias naturales y modos propios de vibración | 20 |
| 2.2.6. Ortogonalidad de los modos propios | 22 |
| 3. Interfaz del programa AMVI | 24 |
| 4. Ejemplo: viga de aluminio | 26 |
| 4.1. Solución teórica | 26 |
| 4.2. Solución del programa AMVI | 29 |
| 4.3. Observaciones | 32 |
| 5. Tareas | 33 |
| 6. Cuestiones | 35 |

1. Introducción

La presente práctica tiene como objetivo la obtención teórica y numérica de las frecuencias naturales y modos propios normalizados de vibración de vigas de sección continua, bajo distintas condiciones de contorno, mediante la teoría de Euler-Bernoulli, así como la discusión de los resultados obtenidos.

El cálculo numérico se realiza mediante el programa AMVI (Análisis Modal de Vigas), programa de cálculo de elementos finitos.

El contenido de la práctica se estructura de la siguiente manera:

- Teoría: presentación de la teoría que rige el análisis modal de vigas en el programa AMVI (Análisis Modal de Vigas).
- Ejemplo: ejemplo de uso del programa AMVI para el cálculo de las frecuencias naturales y modos propios normalizados de vigas.
- Tareas: ejercicios a realizar por el alumno.
- Cuestiones a responder.

2. Teoría

A la hora de hallar las frecuencias naturales de una viga, podemos emplear distintos métodos, teniendo en cuenta las propiedades de la misma, las condiciones de contorno y las simplificaciones realizadas en el planteamiento del sistema.

La técnica más realista de cálculo es modelar la viga elástica a partir de la teoría de la elasticidad, seguido por la aplicación del método de los elementos finitos. El modelo es tridimensional con un coste computacional elevado. En la práctica se prefieren modelos unidimensionales.

Sea la sección de una viga como la mostrada en la figura 1:

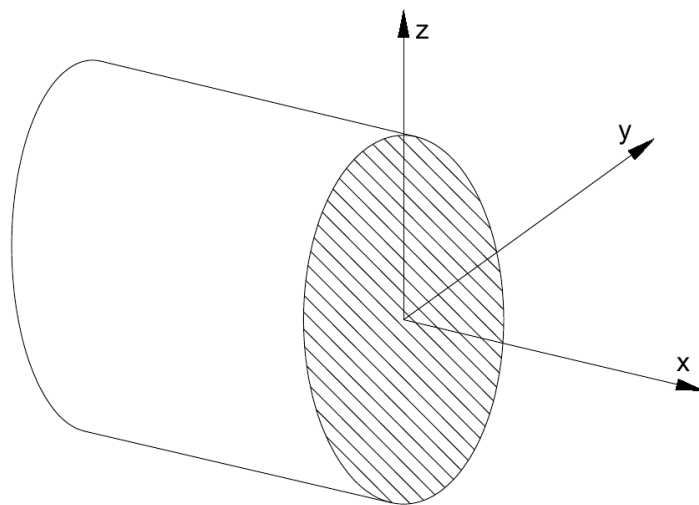


Figura 1: Sección de una viga

El modelo más simple de vigas elásticas es el de Euler-Bernoulli (ecuación 1):

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

En la ecuación 1, $w \equiv w(x, t)$ es el desplazamiento vertical del eje de la viga, siendo las constantes físicas: ρ densidad, A área de la sección transversal, E módulo de elasticidad e I momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y .

El modelo de Euler-Bernoulli sólo tiene en cuenta el efecto de flexión.

2.1. Vibración transversal

2.1.1. Ecuación del movimiento

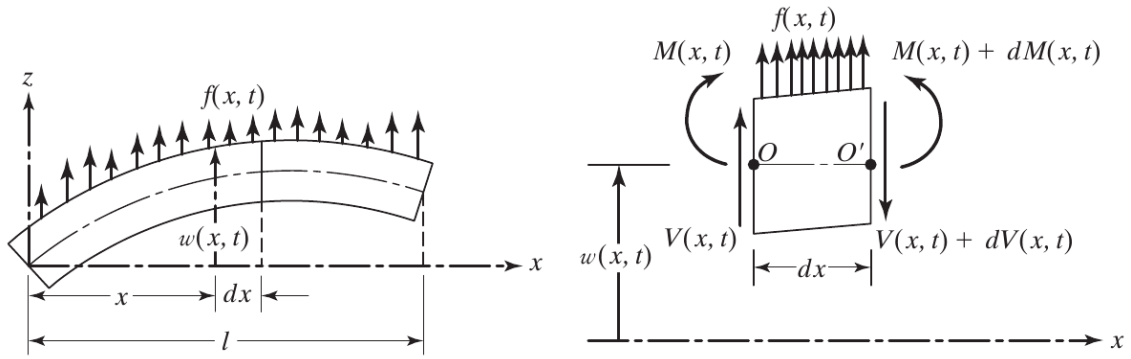


Figura 2: Viga en flexión

Se considera el elemento viga en equilibrio de la figura 2 donde $M(x, t)$ es el momento flector, $V(x, t)$ es el cortante y $f(x, t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre la viga. La fuerza de inercia que actúa sobre el cuerpo es:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (2)$$

El sumatorio de fuerzas en la dirección z es:

$$-(V + dV) + f(x, t) dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3)$$

donde ρ es la densidad y $A(x)$ es la sección de la viga.

En 4 se muestra el sumatorio de momentos alrededor del eje y en el punto O :

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (4)$$

Si:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad y \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (5)$$

y despreciando los términos con segundas derivadas en dx , las ecuaciones (3) y (4) pueden expresarse como:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (7)$$

De (7) se obtiene $V = \frac{\partial M}{\partial x}$, sustituyendo en (6):

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (8)$$

Según la teoría de Euler-Bernoulli de vigas esbeltas la relación entre momento flector y deformación es:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (9)$$

Introduciendo la expresión (9) en (8) se obtiene la ecuación del movimiento para una vibración forzada de una viga de sección no uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (10)$$

Para una viga de sección uniforme:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (11)$$

Para una vibración libre $f(x, t) = 0$:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (12)$$

2.1.2. Condiciones iniciales

Ya que la ecuación del movimiento implica una segunda derivada respecto al tiempo y una cuarta derivada con respecto a x , serán necesarias 2 condiciones iniciales y 4 condiciones de contorno para hallar la solución para $w(x, t)$. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \quad (13)$$

2.1.3. Vibración libre

La solución para la ecuación (12) se halla mediante el método de separación de variables:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (14)$$

Se sustituye (12) en (14) para obtener:

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = w^2 \quad (15)$$

donde $a = w^2$ es una constante positiva.

La ecuación (15) puede expresarse como:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + w^2 T(t) = 0 \quad (17)$$

donde

$$\beta^4 = \frac{w^2}{c^2} = \frac{\rho A w^2}{EI} \quad (18)$$

La solución de la ecuación (17) tiene la forma:

$$T(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad (19)$$

donde A y B son constantes obtenidas a partir de las condiciones iniciales.

La solución de la ecuación (16) es de la forma:

$$W(x) = C e^{sx} \quad (20)$$

donde C y s son constantes.

La solución de la ecuación diferencial (16) es:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \\ &= C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \end{aligned} \quad (21)$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes diferentes que se hallan a partir de las condiciones de contorno.

Las frecuencias naturales de la viga se obtienen a partir de la expresión (18):

$$w = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (22)$$

$W(x)$ es el modo propio de la viga.

Para cualquier viga existirán infinitos modos propios y frecuencias naturales, cada una de ellas asociada a un modo propio.

En los siguientes apartados se analizan distintas condiciones de contorno junto con los respectivos valores de C_1, C_2, C_3, C_4 y β .

2.1.4. Condiciones de contorno

Viga libre en ambos extremos Se considera una viga con ambos extremos libres como la de la figura 3:

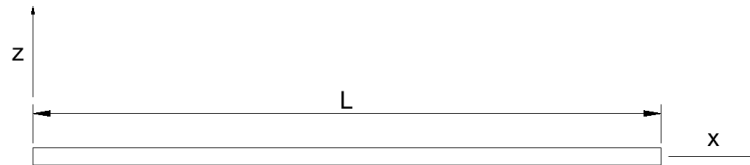


Figura 3: Viga libre en ambos extremos con masa propia distribuida

Se parte de la ecuación (16):

$$\begin{aligned}
W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\
\frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\
\frac{d^2W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\
\frac{d^3W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sin \beta x
\end{aligned} \tag{23}$$

Las condiciones de contorno implican:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{d^3W}{dx^3} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Cortante nula en } x = 0) \\
\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = L) \\
\left. \frac{d^3W}{dx^3} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Cortante nula en } x = L)
\end{aligned} \tag{24}$$

Sustituyendo las condiciones (24) en las ecuaciones (23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_4 &= C_2 \\
C_3 &= C_1
\end{aligned} \tag{25}$$

$$C_1(\sinh \beta L - \sin \beta L) + C_2(\cosh \beta L - \cos \beta L) = 0 \tag{26}$$

$$C_1(\cosh \beta L - \cos \beta L) + C_2(\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0 \tag{27}$$

Se expresan de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Para que el sistema de ecuaciones homogéneas (28) en C_1 y C_2 nos dé soluciones distintas de 0 es preciso que el determinante de los coeficientes sea nulo:

$$\begin{vmatrix} \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L - \cos \beta L \\ \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

Desarrollando la expresión (29) obtenemos la ecuación (31):

$$(\sinh \beta L - \sin \beta L)(\sinh \beta L + \sin \beta L) - (\cosh \beta L - \cos \beta L)^2 = 0 \tag{30}$$

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1 \tag{31}$$

Las raíces de la ecuación (31) se obtienen mediante un método iterativo como el de Newton-Rhapson. Las mismas se muestran en la tabla 1:

| Soluciones | |
|------------|-------------------------|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 0 |
| $n = 2$ | 4,73004 |
| $n = 3$ | 7,8532 |
| $n = 4$ | 10,9956 |
| n | $\approx \pi (n - 1/2)$ |

Tabla 1: Soluciones de la ecuación (31)

En el caso de $n = 1$, $\beta_n L = 0$. Éste se corresponde a un modo de sólido rígido y por tanto su frecuencia es igual a 0.

A partir de las raíces de la tabla 1 obtenemos las frecuencias naturales del sistema, así como sus modos propios de vibración.

Para las frecuencias naturales partimos de la expresión (22) para llegar a:

$$\begin{aligned}
w^2 &= \beta^4 c^2 = \beta^4 \frac{EI}{\rho A} \\
w &= \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{rad/s}) \\
f &= \frac{w}{2\pi} \\
f_n &= \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz})
\end{aligned} \tag{32}$$

Así, y a modo de ejemplo, las 4 primeras frecuencias naturales para una viga con ambos extremos libres tendrían los valores mostrados en la tabla 2:

| n | w_n | f_n |
|-----|--|--|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{22,373}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,373}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{61,673}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,673}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{120,903}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,903}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 2: Primeras 4 frecuencias naturales de viga con extremos libres

La expresión de los modos de vibración será aplicable a las soluciones con la forma $\beta_n L > 0$.

Partiendo de la ecuación (27) y despejando la constante C_2 :

$$C_2 = C_1 \frac{-\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} \quad (33)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (25) y la ecuación (33) los modos propios de vibración tiene la forma:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1(\sinh \beta x + \sin \beta x) + C_2(\cosh \beta x + \cos \beta x) = \\ &= C_1 \left((\sinh \beta x + \sin \beta x) + \frac{\cos \beta L - \cosh \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} (\cosh \beta x + \cos \beta x) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Se procede a normalizar el modo propio con respecto a la masa de la viga:

$$\int_0^L \rho A (W_n(x))^2 dx = 1 \quad (35)$$

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \left(\sinh \beta x + \sin \beta x + \frac{\cos \beta L - \cosh \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} (\cosh \beta x + \cos \beta x) \right) \quad (36)$$

Viga en voladizo Se considera una viga en voladizo, con extremos empotrado y libre:

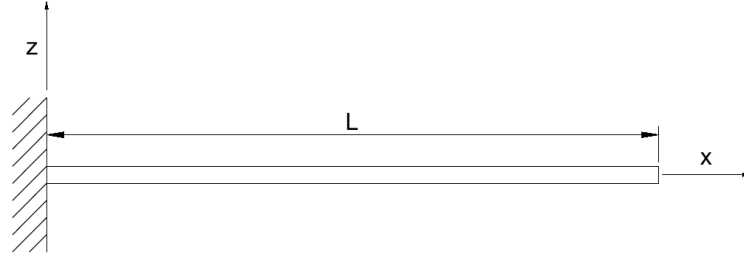


Figura 4: Viga en voladizo

Partiendo de la ecuación (16), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\ \frac{d^2W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\ \frac{d^3W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sin \beta x \end{aligned} \quad (37)$$

Las condiciones de contorno de una viga en voladizo son las mostradas en las ecuaciones (38):

$$\begin{aligned}
W(0) &= 0 && \text{(Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 && \text{(Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 && \text{(Momento flector nulo en } x = L) \\
\left. \frac{d^3W}{dx^3} \right|_{x=L} &= 0 && \text{(Cortante nula en } x = L)
\end{aligned} \tag{38}$$

Realizando un proceso análogo al de la viga con extremos libres se obtiene la ecuación de frecuencias (39):

$$\cos \beta L \cosh \beta L = -1 \tag{39}$$

Las soluciones de la ecuación (39) se hallan mediante el método iterativo Newton-Rhapson. En la tabla 3 se muestran las mismas:

| Soluciones | |
|------------|-------------------------------|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 1,8751 |
| $n = 2$ | 4,69409 |
| $n \geq 3$ | $\approx \frac{(2n-1)\pi}{2}$ |

Tabla 3: Soluciones de la ecuación (39)

Siguiendo el mismo procedimiento de (32), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{40}$$

A modo de ejemplo, en la tabla 4 se muestran las primeras 4 frecuencias naturales de una viga en voladizo:

| n | f_n |
|----------|---|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{3,5156}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,034}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,6973}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,9019}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 4: Primeras 4 frecuencias naturales de viga en voladizo

Los modos propios normalizados de vibración para una viga en voladizo tienen la siguiente expresión:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} \left(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \right) \quad (41)$$

Viga biempotrada Se considera una viga con extremos empotrados en la figura 5:

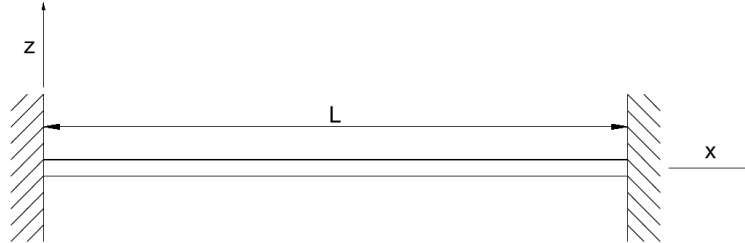


Figura 5: Viga biempotrada

Partiendo de la ecuación (16), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\ \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \\ \frac{d^3 W(x)}{dx^3} &= C_1 \beta^3 \cosh \beta x + C_2 \beta^3 \sinh \beta x - C_3 \beta^3 \cos \beta x + C_4 \beta^3 \sin \beta x \end{aligned} \quad (42)$$

Las condiciones de contorno de una viga biempotrada son las mostradas a continuación:

$$\begin{aligned}
W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\
W(L) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = L) \\
\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = L)
\end{aligned} \tag{43}$$

La ecuación de frecuencias para una viga biempotrada se muestra en (44):

$$\cos \beta_n L \cosh \beta_n L = 1 \tag{44}$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Rhapson. Las soluciones a la ecuación (44) se muestran en la tabla 5:

| Soluciones | |
|------------|--|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 4,73004 |
| $n = 2$ | 7,85321 |
| $n = 3$ | 10,9956 |
| $n = 4$ | 14,13717 |
| $n = 5$ | 17,27876 |
| $n > 5$ | $\approx \pi \left(\frac{1}{2} + n \right)$ |

Tabla 5: Soluciones de la ecuación (44)

Siguiendo el mismo procedimiento de (32), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{45}$$

En la tabla 6 se muestran las primeras 5 frecuencias naturales de una viga biempotrada:

| n | f_n |
|----------|--|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,37328}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,67291}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,90322}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{199,85958}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{298,55555}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 6: Primeras 5 frecuencias naturales de viga biempotrada

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} \left(\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \frac{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L}{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L} (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \right) \quad (46)$$

Viga con extremos empotrado y apoyado Se considera en la figura 6 una viga con extremos empotrado y apoyado:

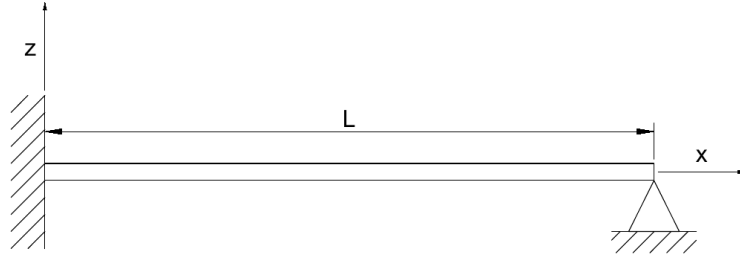


Figura 6: Viga con extremos empotrado y apoyado

Partiendo de la ecuación (16), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{dW(x)}{dx} &= C_1 \beta \cosh \beta x + C_2 \beta \sinh \beta x + C_3 \beta \cos \beta x - C_4 \beta \sin \beta x \\ \frac{d^2W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \end{aligned} \quad (47)$$

Las condiciones de contorno de una viga con sus extremos empotrado y apoyado son las mostradas a continuación:

$$\begin{aligned}
W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Inclinación del eje neutro de la viga nulo en } x = 0) \\
W(L) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = L) \\
\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = L)
\end{aligned} \tag{48}$$

La ecuación de frecuencias (49) se muestra a continuación:

$$\tanh \beta L - \tan \beta L = 0 \tag{49}$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Rhapson. Las soluciones a la ecuación (49) se muestran en la tabla 7:

| Soluciones | |
|------------|--|
| Índice | $\beta_n L$ |
| $n = 1$ | 3,9266 |
| $n = 2$ | 7,0686 |
| $n = 3$ | 10,2102 |
| $n = 4$ | 13,3518 |
| $n = 5$ | 16,4934 |
| $n > 5$ | $\approx \pi \left(n + \frac{1}{4} \right)$ |

Tabla 7: Soluciones de la ecuación (49)

Siguiendo el mismo procedimiento de (32), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{50}$$

En la tabla 8 se muestran las primeras 5 frecuencias naturales de una viga con extremos empotrado y apoyado:

| n | f_n |
|----------|--|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{15,41819}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{49,96511}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{104,24818}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{178,27056}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{272,03224}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 8: Primeras 5 frecuencias naturales de viga con extremos empotrado y apoyado

Los modos propios normalizados de vibración tienen la expresión (51):

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} \left(\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \frac{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L} (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \right) \quad (51)$$

Viga biapoyada Se considera una viga con ambos extremos apoyados:

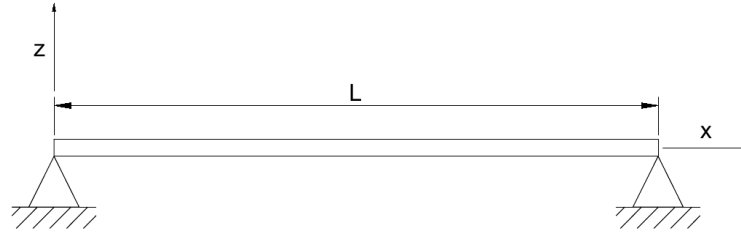


Figura 7: Viga biapoyada

Partiendo de la ecuación (16), su solución y las derivadas de la misma son:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \\ \frac{d^2 W(x)}{dx^2} &= C_1 \beta^2 \sinh \beta x + C_2 \beta^2 \cosh \beta x - C_3 \beta^2 \sin \beta x - C_4 \beta^2 \cos \beta x \end{aligned} \quad (52)$$

Las condiciones de contorno de una viga biapoyada se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
W(0) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = 0) \\
\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = 0) \\
W(L) &= 0 & (\text{Desplazamiento nulo en } x = L) \\
\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 & (\text{Momento flector nulo en } x = L)
\end{aligned} \tag{53}$$

La ecuación de frecuencias (54) de una viga biapoyada, se muestra a continuación:

$$\sin \beta L \sinh \beta L = 0 \tag{54}$$

Dicha ecuación se resuelve mediante métodos iterativos. El método empleado ha sido el de Newton-Rhapson. Las soluciones a la ecuación (54) tienen la forma:

$$\beta_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{55}$$

Siguiendo el mismo procedimiento de (32), la expresión para las frecuencias naturales del sistema es:

$$f_n = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{56}$$

En la tabla 9 se muestran, a modo de ejemplo, las primeras 3 frecuencias naturales de una viga biapoyada:

| n | f_n |
|----------|---|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{9,8696}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{39,47842}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{88,82644}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ |

Tabla 9: Primeras 3 frecuencias naturales de una viga biapoyada

Los modos propios normalizados de vibración tienen la siguiente expresión:

$$W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin \beta_n x \tag{57}$$

2.2. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es un método numérico empleado para hallar soluciones precisas de problemas mecánicos y estructurales. El método se fundamenta en reemplazar la estructura objeto de estudio por elementos más pequeños que se comportan como miembros estructurales continuos, llamados elementos finitos. Los elementos finitos se interconectan unos con otros en ciertos puntos llamados nodos.

La idea detrás del método de elementos finitos es que las soluciones de cada elemento, elegidas convenientemente, puede converger a la solución exacta del sistema completo, conforme se reduce el tamaño del elemento finito. En los nodos hay equilibrio de fuerzas; entre los elementos finitos, compatibilidad de desplazamientos. Ello permite que el sistema se comporte de forma unitaria.

2.2.1. Ecuaciones de movimiento de un elemento

En la figura 8 se muestra el modelo de elementos finitos de la estructura de una fresadora. En este modelo las columnas y el sobrebrazo están representados por elementos de placa triangulares y el cursor transversal y el portaherramientas por elementos viga.

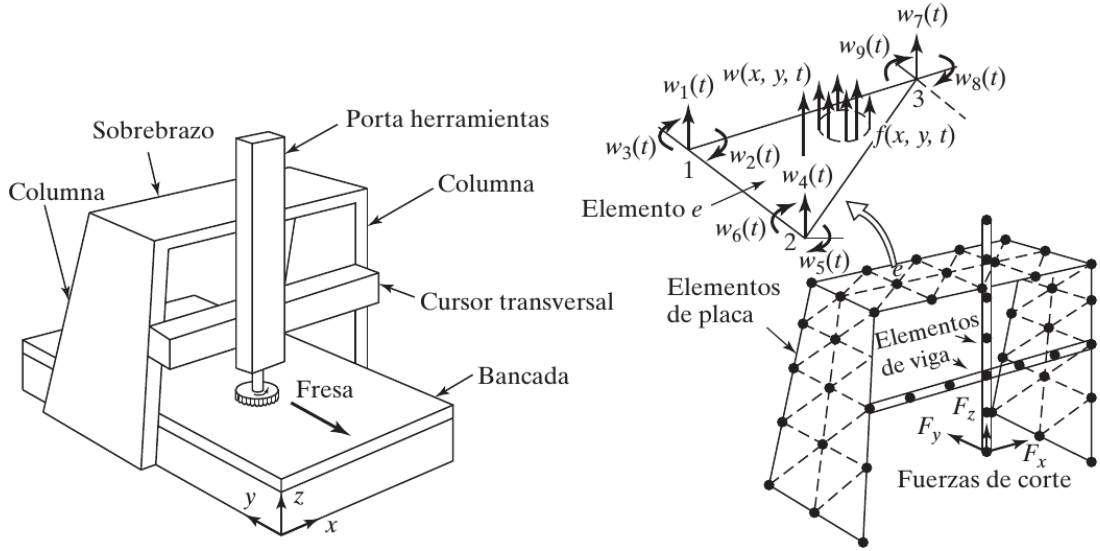


Figura 8: Modelado de elementos finitos

Los elementos están conectados entre sí por los nodos. El desplazamiento de un elemento se expresa en función de los desplazamientos de los nodos del elemento. En la figura 8 el desplazamiento transversal de un elemento se expresa como $w(x, y, t)$. Los valores de w , $\partial w / \partial x$ y $\partial w / \partial y$ de los nodos 1, 2 y 3 son incógnitas y se denominan $w_1(t), w_2(t), w_3(t), \dots, w_9(t)$. El desplazamiento $w(x, y, t)$ se expresa en función de los desplazamientos $w_i(t)$ como:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_i(t) \quad (58)$$

donde $N_i(x, y)$ es la función de forma correspondiente al desplazamiento del nodo $w_i(t)$ y n el número de nodos del elemento ($n = 9$ en la figura 8). Si una

fuerza distribuida $f(x, y, t)$ actúa sobre un elemento, la misma se puede distribuir en fuerzas $f_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, 9$), correspondientes a cada nodo. Si actuaran fuerzas puntuales en los nodos, se añadirían a la fuerza $f_i(t)$ correspondiente.

Se procede a obtener la ecuación del movimiento para determinar los desplazamientos de $w_i(t)$ bajo la acción de las fuerzas $f_i(t)$. Partiendo de la ecuación 58, la energía cinética T y la potencial V de un elemento se expresan como:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{W}}^T [m] \dot{\vec{W}} \quad (59)$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{W}^T [k] \vec{W} \quad (60)$$

donde:

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ \vdots \\ dw_n/dt \end{Bmatrix} \quad (61)$$

$[m]$ y $[k]$ son las matrices de masa y rigidez del elemento.

Siendo las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (62)$$

Se sustituyen las ecuaciones (59) y (60) en las ecuaciones de Lagrange (62), obteniendo las ecuaciones de movimiento del elemento finito:

$$[m] \ddot{\vec{W}} + [k] \vec{W} = \vec{f} \quad (63)$$

donde \vec{f} es el vector de fuerzas nodales y $\ddot{\vec{W}}$ el vector de aceleraciones nodales dado por:

$$\ddot{\vec{W}} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1(t) \\ \ddot{w}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{w}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d^2w_1/dt^2 \\ d^2w_2/dt^2 \\ \vdots \\ d^2w_n/dt^2 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

2.2.2. Matriz de masa, matriz de rigidez y vector fuerza de un elemento viga

Se considera un elemento viga regido por la teoría de Euler-Bernoulli. La figura 9 muestra una viga uniforme sujeta a una fuerza distribuida transversal $f(x, t)$:

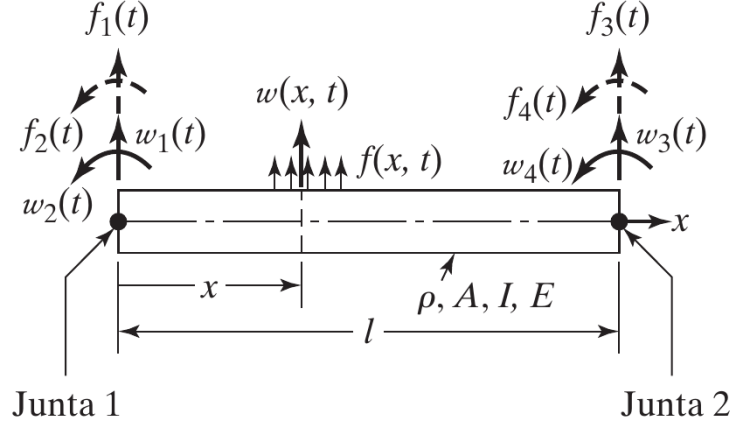


Figura 9: Elemento finito de una viga

Las juntas o nodos están sometidas a un desplazamiento traslacional y a otro rotacional. Los desplazamientos se designan por $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ y $w_4(t)$. Las fuerzas nodales $f_1(t)$ y $f_3(t)$ se corresponden a los desplazamientos nodales lineales $w_1(t)$ y $w_3(t)$, y las fuerzas nodales rotacionales (momentos flectores) $f_2(t)$ y $f_4(t)$ se corresponden con los desplazamientos nodales rotacionales $w_2(t)$ y $w_4(t)$, respectivamente. Se supone que el desplazamiento transversal en el elemento es una ecuación cúbica en x :

$$w(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3 \quad (65)$$

Los desplazamientos nodales han de cumplir las condiciones:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_1(t), & \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) &= w_2(t) \\ w(l, t) &= w_3(t), & \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) &= w_4(t) \end{aligned} \quad (66)$$

Sustituyendo las condiciones (66) en la ecuación del movimiento (65) se obtiene:

$$\begin{aligned} a(t) &= w_1(t) \\ b(t) &= w_2(t) \\ c(t) &= \frac{1}{l^2}(-3w_1(t) - 2w_2(t)l + 3w_3(t) - w_4(t)l) \\ d(t) &= \frac{1}{l^3}(2w_1(t) + w_2(t)l - 2w_3(t) + w_4(t)l) \end{aligned} \quad (67)$$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación (65) las ecuaciones (67) resulta:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) w_1(t) + \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) lw_2(t) + \\ &+ \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right) w_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) lw_4(t) \end{aligned} \quad (68)$$

La ecuación (68) se puede expresar de la siguiente forma:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x)w_i(t) \quad (69)$$

donde $N_i(x)$ son las funciones de forma dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2(x) &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \end{aligned} \quad (70)$$

La energía cinética, la energía potencial de flexión y el trabajo virtual del elemento se expresan como:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \equiv \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}(t)^T [m] \dot{\vec{w}}(t) \\ V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \equiv \frac{1}{2} \vec{w}(t)^T [k] \vec{w}(t) \\ \delta W(t) &= \int_0^l f(x,t) \delta w(x,t) dx \equiv \delta \vec{w}(t)^T \vec{f}(t) \end{aligned} \quad (71)$$

donde ρ es la densidad de la viga, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y , A es el área de la sección transversal y:

$$\begin{aligned} \vec{w}(t) &= \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{Bmatrix}, & \dot{\vec{w}}(t) &= \begin{Bmatrix} dw_1/dt \\ dw_2/dt \\ dw_3/dt \\ dw_4/dt \end{Bmatrix} \\ \delta \vec{w}(t) &= \begin{Bmatrix} \delta w_1(t) \\ \delta w_2(t) \\ \delta w_3(t) \\ \delta w_4(t) \end{Bmatrix}, & \vec{f}(t) &= \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

Sustituyendo la ecuación (68) en las ecuaciones de (71) y operando, las matrices de masa, rigidez y fuerzas del elemento finito son:

$$[m] = \frac{\rho A l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$f_i(t) = \int_0^l f(x,t) N_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (75)$$

2.2.3. Ecuaciones de movimiento del sistema de elementos finitos

Debido a que la estructura completa es la unión de los elementos finitos, se procede a extender las ecuaciones de movimiento de un elemento finito en el sistema global de coordenadas a toda la estructura.

En el caso que nos ocupa, las matrices de masa, rigidez y fuerza locales coinciden con las matrices en ejes globales, ya que ejes locales y globales, a su vez, coinciden.

Los desplazamientos nodales de la estructura completa en ejes globales son $U_1(t)$, $U_2(t)$, \dots , $U_M(t)$. Expresados de forma matricial:

$$\vec{U}(t) = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_M(t) \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Se designará con el superíndice (e) aquellos valores correspondientes a un elemento finito en particular. Por tanto, siendo $\vec{U}^{(e)}(t)$ el vector de desplazamientos de un elemento finito, el mismo y $\vec{U}(t)$ se relacionan de la siguiente forma:

$$\vec{U}^{(e)}(t) = [A^{(e)}] \vec{U}(t) \quad (77)$$

donde $[A^{(e)}]$ es una matriz rectangular compuesta de ceros y unos.

La energía cinética de la estructura completa se obtiene añadiendo las energías cinéticas de cada elemento finito:

$$T = \sum_{e=1}^E \frac{1}{2} \dot{\vec{U}}^{(e)T} [\bar{m}] \dot{\vec{U}}^{(e)} \quad (78)$$

donde E representa el número de elementos finitos en el ensamblaje. Derivando la ecuación (77) la relación entre los vectores de velocidad es:

$$\dot{\vec{U}}^{(e)}(t) = [A^{(e)}] \dot{\vec{U}}(t) \quad (79)$$

Sustituyendo (79) en (78) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \dot{\vec{U}}^T [A^{(e)}]^T [\bar{m}^{(e)}] [A^{(e)}] \dot{\vec{U}} \quad (80)$$

La energía cinética del sistema completo también puede expresarse en función de las velocidades de los nodos de la estructura completa $\dot{\vec{U}}$:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{U}}^T [M] \dot{\vec{U}} \quad (81)$$

donde $[M]$ es la matriz de masa de la estructura completa. Comparando las ecuaciones (80) y (81) se obtiene:

$$[M] = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T [\bar{m}^{(e)}] [A^{(e)}] \quad (82)$$

De forma análoga, considerando la energía potencial, la matriz de rigidez de la estructura completa, $[K]$, es:

$$[\tilde{K}] = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T [\tilde{k}^{(e)}] [A^{(e)}] \quad (83)$$

Teniendo en cuenta el trabajo virtual, se obtiene el vector de fuerzas nodales de la estructura completa, $\vec{\tilde{F}}$:

$$\vec{\tilde{F}} = \sum_{e=1}^E [A^{(e)}]^T \vec{f}^{(e)} \quad (84)$$

Una vez halladas las matrices de masa, rigidez y de fuerza del sistema completo, las ecuaciones de Lagrange para la estructura completa son:

$$[\tilde{M}] \ddot{\vec{\tilde{U}}} + [\tilde{K}] \vec{\tilde{U}} = \vec{\tilde{F}} \quad (85)$$

El vector $\vec{\tilde{F}}$ se ha obtenido teniendo en cuenta las cargas distribuidas en cada elemento. En caso de existir cargas puntuales aplicadas en un nodo, dicha carga debe ser añadida al nodo correspondiente.

2.2.4. Incorporación de las condiciones de contorno

En la obtención de las ecuaciones del movimiento de la estructura completa no se ha considerado ninguna restricción en los grados de libertad. Normalmente una estructura presenta alguna forma de sujeción que conlleva que los desplazamientos sean cero en algunos nodos para evitar el movimiento de sólido rígido de la estructura. Una forma simple de incorporar condiciones de desplazamiento nulo consiste en eliminar las correspondientes filas y columnas de las matrices $[\tilde{M}]$, $[\tilde{K}]$ y $\vec{\tilde{F}}$.

Las ecuaciones de movimiento de la estructura coaccionada se expresan como:

$$[\tilde{M}]_{N \times N} \ddot{\vec{\tilde{X}}}_{N \times 1} + [\tilde{K}]_{N \times N} \vec{\tilde{X}}_{N \times 1} = \vec{\tilde{F}}_{N \times 1} \quad (86)$$

donde N es el número de desplazamientos nodales libres de la estructura.

2.2.5. Frecuencias naturales y modos propios de vibración

El caso estudiado en la presente práctica es aquél que corresponde a un movimiento libre no amortiguado, por lo que el término $\vec{\tilde{F}}$ de la ecuación (86) se anula:

$$[\tilde{M}]_{N \times N} \ddot{\vec{\tilde{X}}}_{N \times 1} + [\tilde{K}]_{N \times N} \vec{\tilde{X}}_{N \times 1} = \vec{0} \quad (87)$$

Con el objetivo de mejorar la legibilidad hacemos $[\tilde{M}] = [m]$ y $[\tilde{K}] = [k]$. Se propone una solución a la ecuación (87) de la forma

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (88)$$

donde X_i es una constante y T depende del tiempo. La ecuación (88) muestra que la relación de las amplitudes de 2 coordenadas

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} \quad (89)$$

no depende del tiempo. Esto, en la práctica, implica que todas las coordenadas tienen movimientos síncronos. La configuración del sistema no varía de forma durante el movimiento, pero sí lo hace la amplitud. La configuración del sistema, que viene dada por el vector

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (90)$$

se denomina modo propio del sistema.

Sustituyendo (88) en (87) se obtiene:

$$[m]\vec{X}\ddot{T}(t) + [k]\vec{X}T(t) = \vec{0} \quad (91)$$

La ecuación (91) puede expresarse de forma escalar en n ecuaciones independientes

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (92)$$

de las que se obtienen las relaciones

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (93)$$

Como el miembro izquierdo de la ecuación (93) es independiente del índice i , y a su vez el derecho lo es de t , ambos miembros han de ser iguales a una constante. Se considera dicha constante como w^2 en la ecuación:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + w^2 T(t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - w^2 m_{ij}) X_j &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (94)$$

$$[[k] - w^2[m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (95)$$

La solución a la ecuación (94) puede expresarse como:

$$T(t) = C_1 \cos(wt + \phi) \quad (96)$$

donde C_1 y ϕ son constantes, la amplitud y el desfase, respectivamente.

La ecuación (96) muestra que todas las coordenadas pueden realizar un movimiento armónico con la misma frecuencia w y ángulo de desfase ϕ . La frecuencia de w no puede tomar cualquier valor, ha de satisfacer la ecuación (95). Dicha ecuación representa n ecuaciones homogéneas con incógnitas $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Para obtener una solución no trivial distinta de 0, el determinante Δ de la matriz de coeficientes ha de ser nulo:

$$\Delta = |k_{ij} - w^2 m_{ij}| = |[k] - w^2[m]| = 0 \quad (97)$$

La ecuación (95) se conoce como la del problema de autovalores y autovectores.

La ecuación (97) es la ecuación característica, w^2 es el autovalor y w es la frecuencia angular natural del sistema.

Al desarrollar la ecuación (97) se obtiene una ecuación polinómica de orden n en w^2 . La solución de esta ecuación proporciona n valores de w^2 . Los valores de las soluciones son reales y positivos cuando las matrices $[k]$ y $[m]$ son simétricas y positivas definidas, como es el caso. Si $w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2$ constituyen las n soluciones en orden de magnitud ascendente, sus raíces cuadradas positivas proporcionan las n frecuencias angulares naturales del sistema, tal que $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$. El valor w_1 se denomina frecuencia fundamental.

La ecuación (95) puede expresarse como:

$$[\lambda[k] - [m]] \vec{X} = \vec{0} \quad (98)$$

donde:

$$\lambda = \frac{1}{w^2} \quad (99)$$

Multiplicando por $[k]^{-1}$ se obtiene:

$$[\lambda[I] - [D]] \vec{X} = \vec{0} \quad (100)$$

$$\lambda[I] \vec{X} = [D] \vec{X} \quad (101)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad y

$$[D] = [k]^{-1}[m] \quad (102)$$

es la matriz dinámica. La ecuación (101) representa el problema estándar de autovalores. Para obtener una solución no trivial se iguala el determinante característico a 0:

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0 \quad (103)$$

Se procede a resolver la ecuación (103) obteniendo la ecuación característica.

2.2.6. Ortogonalidad de los modos propios

Los modos propios obtenidos a partir de la ecuación (101) son ortogonales entre ellos. Una frecuencia w_i y su correspondiente modo propio $\vec{X}^{(i)}$ cumplen la ecuación (95), por lo que:

$$w_i^2 [m] \vec{X}^{(i)} = [k] \vec{X}^{(i)} \quad (104)$$

Se considera otra frecuencia w_j , con su modo propio $\vec{X}^{(j)}$, que a su vez:

$$w_j^2 [m] \vec{X}^{(j)} = [k] \vec{X}^{(j)} \quad (105)$$

Multiplicamos las ecuaciones (105) y (104) por $\vec{X}^{(j)T}$ y $\vec{X}^{(i)T}$ respectivamente, y teniendo en cuenta la simetría de las matrices $[k]$ y $[m]$ se obtiene:

$$w_i^2 \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(j)T} [k] \vec{X}^{(i)} \equiv \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(j)} \quad (106)$$

$$w_j^2 \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(j)} \equiv w_j^2 \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(j)} \quad (107)$$

Se sustrae (107) de (106):

$$(w_i^2 - w_j^2) \vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 0 \quad (108)$$

Por regla general $w_i^2 \neq w_j^2$. Por lo que la ecuación (108) es igual a:

$$\vec{X}^{(j)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (109)$$

De las ecuaciones (106) y (107), y comparando con la ecuación (109), se obtiene:

$$\vec{X}^{(j)T} [k] \vec{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (110)$$

Las ecuaciones (109) y (110) muestran que los vectores propios $\vec{X}^{(i)}$ y $\vec{X}^{(j)}$ son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez.

Cuando $i = j$, los miembros de la izquierda de las ecuaciones (109) y (110) no son iguales a 0, y proporcionan los coeficientes de masa y rigidez generalizados del modo i -ésimo:

$$M_{ii} = \vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (111)$$

$$K_{ii} = \vec{X}^{(i)T} [k] \vec{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (112)$$

Las ecuaciones (111) y (112) se expresan en forma matricial como:

$$[\begin{smallmatrix} \nearrow & M & \searrow \end{smallmatrix}] = \begin{pmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{pmatrix} = [X]^T [m] [X] \quad (113)$$

$$[\begin{smallmatrix} \nearrow & K & \searrow \end{smallmatrix}] = \begin{pmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{pmatrix} = [X]^T [k] [X] \quad (114)$$

donde $[X]$ se denomina matriz modal, en la que la columna i -ésima se corresponde con el vector propio i -ésimo:

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \vec{X}^{(2)} \dots \vec{X}^{(n)}] \quad (115)$$

Los modos propios se normalizan de modo que $[\begin{smallmatrix} \nearrow & M & \searrow \end{smallmatrix}] = [I]$:

$$\vec{X}^{(i)T} [m] \vec{X}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (116)$$

En este caso la matriz $[\begin{smallmatrix} \nearrow & K & \searrow \end{smallmatrix}]$ se reduce a:

$$[\begin{smallmatrix} \nearrow & K & \searrow \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} \nearrow & w_i^2 & \searrow \end{smallmatrix}] = \begin{pmatrix} w_1^2 & & & 0 \\ & w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^2 \end{pmatrix} \quad (117)$$

Un modo propio que satisface la ecuación (116) se dice que está ortonormalizado con respecto a la matriz de masa $[m]$.

3. Interfaz del programa AMVI

La interfaz del programa AMVI se muestra en la figura 10:

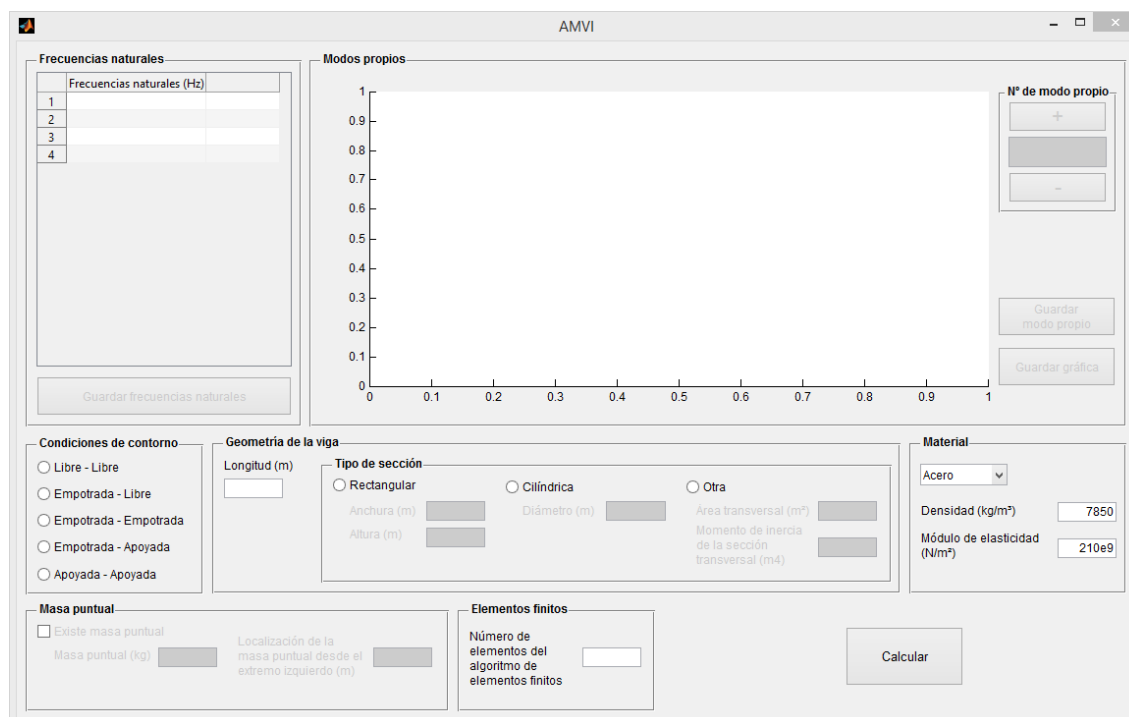


Figura 10: Programa de análisis modal de vigas (AMVI)

Al iniciar el programa se presenta la interfaz mostrada en la figura 10. En ella se puede apreciar una división horizontal de la aplicación en dos partes. La parte inferior se corresponde con la introducción de los datos de los que se compone el problema a resolver, y la superior muestra la solución al mismo.

La parte inferior se divide a su vez en paneles, a saber:

- Condiciones de contorno
- Geometría de la viga
- Tipo de sección
- Material
- Masa puntual
- Elementos finitos

En el panel “Condiciones de contorno”, se seleccionan las coacciones a las que está sometida la viga en estudio. Cinco son las opciones disponibles: extremos libres, viga en voladizo, viga biempotrada, viga empotrada-apoyada y viga biapoyada.

En el panel “Geometría de la viga” y, a su vez, subordinado a este en “Tipo de sección”, el usuario introduce las distintas propiedades geométricas necesarias. Se introduce la longitud de la viga y se selecciona el tipo de sección. Dependiendo de la sección elegida, se habilitan distintos campos con el fin de obtener el área transversal de la sección y el momento de inercia con respecto al eje y . Así, en caso de seleccionar una sección rectangular, se habilitan “Anchura” y “Altura”. En el caso de que se seleccione una sección cilíndrica, se habilita “Diámetro”. Si la sección necesaria no se corresponde con las anteriores, se procede a seleccionar “Otro” para introducir el área transversal y el momento de inercia con respecto al eje y correspondientes.

El panel “Material” presenta un desplegable con los materiales “Acero”, “Aluminio” y “Otro”. En el caso de los dos primeros, al seleccionarlos, valores predefinidos de la densidad y módulo de elasticidad correspondientes a los mismos son asignados automáticamente en sus respectivos campos. En el tercer caso, han de ser introducidos por el usuario.

Una vez el campo de la longitud de la viga es rellenado correctamente, la opción “Existe masa puntual” en el panel “Masa puntual” se habilita para indicar la existencia de masa puntual situada a lo largo de la viga. Cuando se habilita dicha opción, se activan los campos de masa puntual y de la ubicación de la misma con respecto a la longitud de la viga.

Llegados a este punto, sólo resta indicar el número de elementos finitos con los que se resolverá el problema en el panel “Elementos finitos”.

Especificadas todas las variables del análisis se procede a solicitar el cálculo de las frecuencias naturales y los modos propios normalizados del sistema presionando en el botón “Calcular”.

En la parte superior se disponen los siguientes paneles:

- Frecuencias naturales
- Modos propios

Realizados los cálculos correspondientes, las frecuencias naturales del sistema se muestran en su respectivo panel en forma de tabla.

En el panel de los modos propios de vibración se mostrará el modo propio pre-seleccionado en el subpanel “Nº de modo propio”. En caso de no haber ninguno indicado, se mostrará el modo propio normalizado correspondiente a la primera frecuencia natural o frecuencia fundamental. Para representar un modo propio distinto basta con introducir el modo deseado en el campo de texto del panel “Nº de modo propio”. Se pueden emplear los botones “+” y “-” para incrementar o decrementar el número de modo propio representado.

Por último, los botones “Guardar frecuencias naturales”, “Guardar modo propio” y “Guardar gráfica” permiten guardar los resultados en forma de archivo. Las frecuencias naturales y el modo propio se guardarán en formato de archivo de texto (*.txt) tras indicar los nombres de archivo en los diálogos de guardar archivo. En el caso de las gráficas, antes de ser guardadas se abren en una figura en la que se ha de presionar el botón “Guardar” para efectuar dicha acción, indicando el nombre de archivo con el que se guardarán en el disco duro.

4. Ejemplo: viga de aluminio

Los valores del problema ejemplo a resolver se muestran en la tabla 10:

| Ejemplo 1 | |
|-------------------------|-------------------------------------|
| Condiciones de contorno | Empotrado - Libre |
| Longitud viga | 0,5 m |
| Sección | Cuadrada |
| | 0,02 x 0,01 m |
| Material | Aluminio |
| | $\rho_{Al} = 2698,4 \text{ kg/m}^3$ |
| | $E_{Al} = 69 \text{e9 Pa}$ |
| Masa puntual | No |
| Nº elementos finitos | 100 |

Tabla 10: Propiedades del ejemplo 1

4.1. Solución teórica

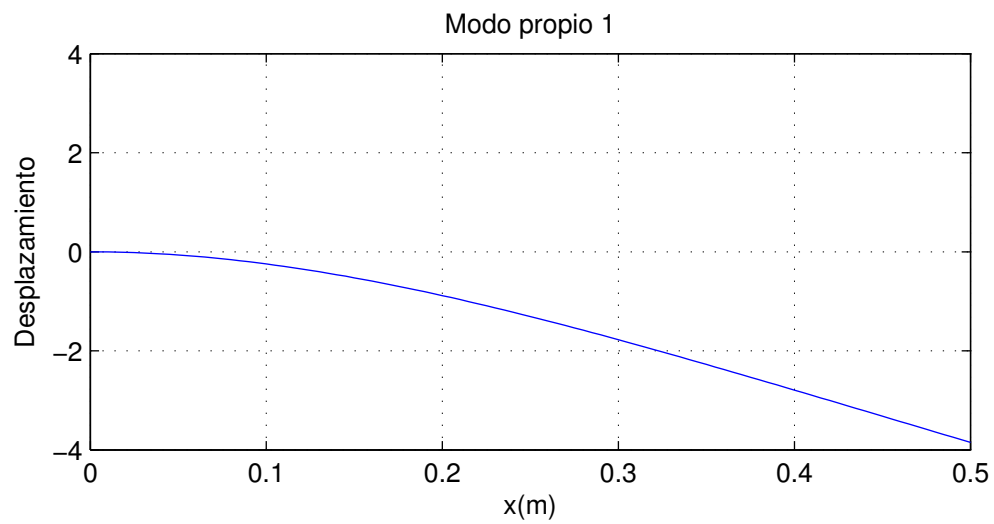
Las condiciones de contorno del ejemplo 1 son extremos empotrado y libre. Las expresiones de las frecuencias naturales para una viga en voladizo, obtenidas por la teoría de Euler-Bernoulli, han sido descritas en la sección 2.1.4.

Las primeras 5 frecuencias naturales, calculadas por el método teórico, se muestran en la tabla 11:

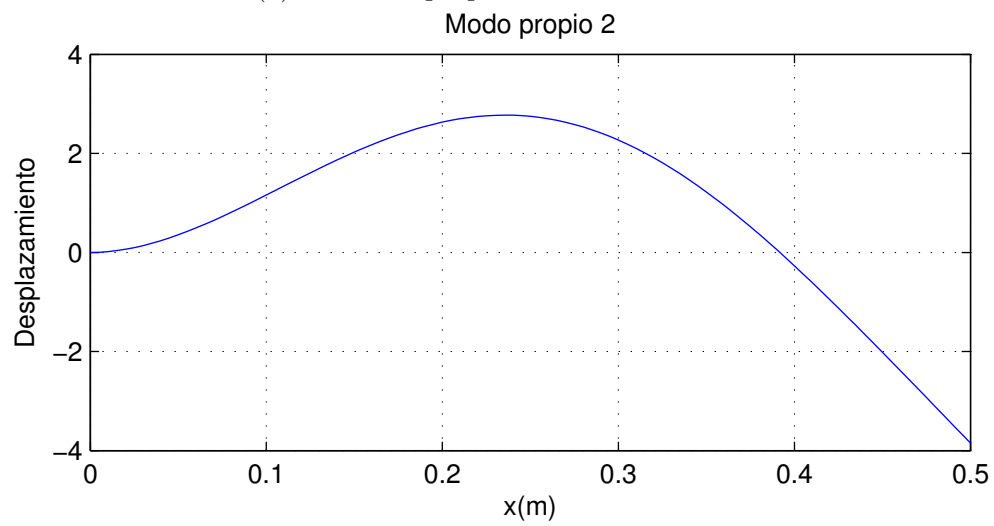
| n | f_n | $f_n \text{ (Hz)}$ |
|---|---|--------------------|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{3,5156}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 32,67 |
| 2 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{22,034}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 204,77 |
| 3 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{61,6973}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 573,25 |
| 4 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{120,9019}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 1123,56 |
| 5 | $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{199,8596}{L^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ | 1857,32 |

Tabla 11: Primeras 5 frecuencias naturales teóricas de la viga del ejemplo 1

Mediante la expresión 51 se obtienen los modos propios teóricos de vibración normalizados. Se representan en las figuras 11 y 12:

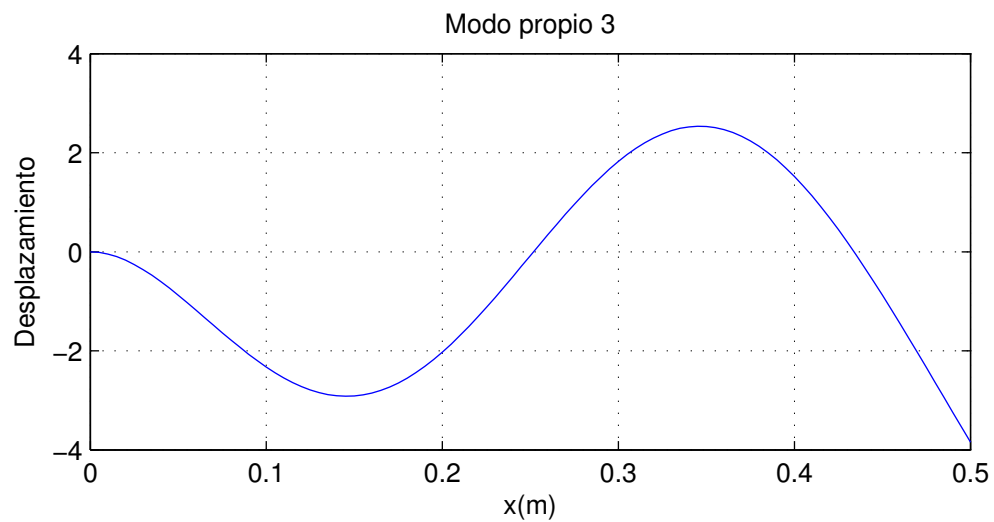


(a) 1^{er} modo propio normalizado teórico

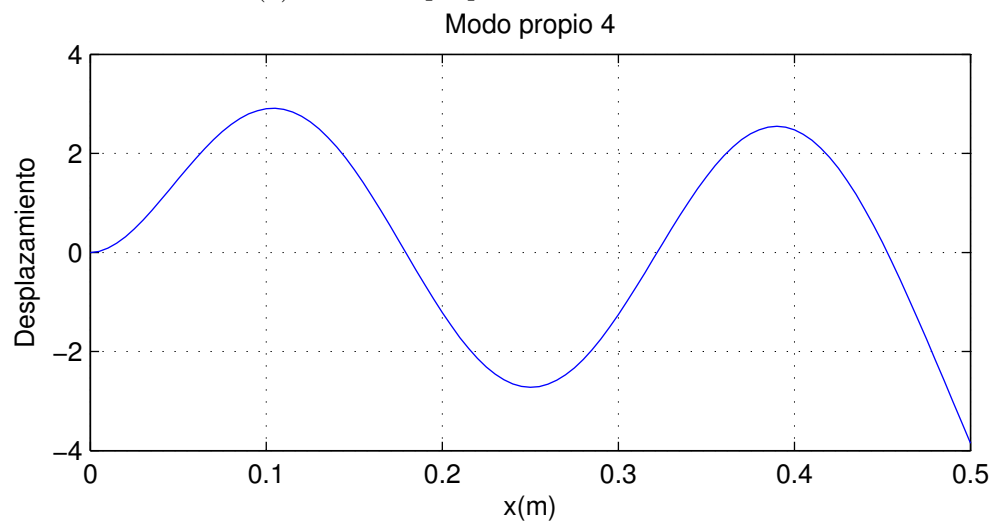


(b) 2^o modo propio normalizado teórico

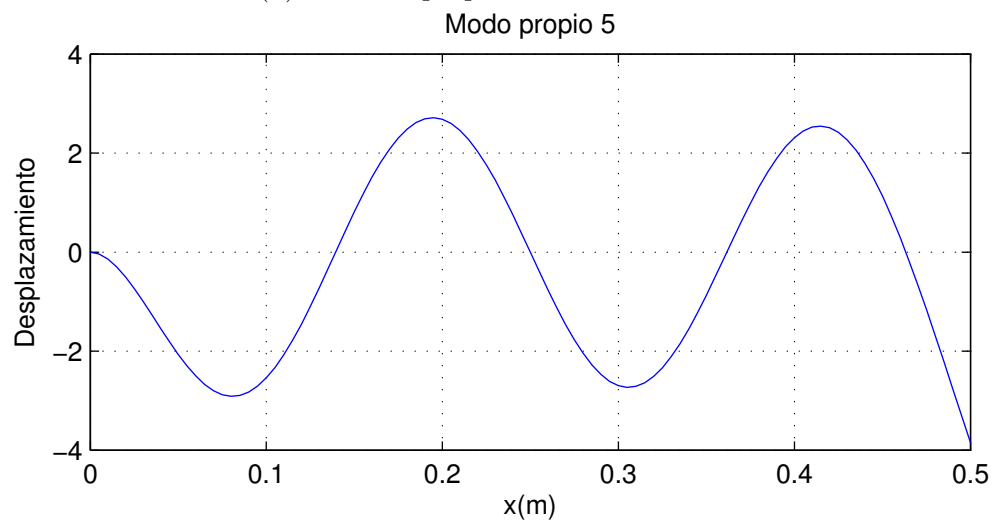
Figura 11: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (continuación en la figura 12)



(a) 3^{er} modo propio normalizado teórico



(b) 4^o modo propio normalizado teórico



(c) 5^o modo propio normalizado teórico

Figura 12: 5 primeros modos propios normalizados teóricos del ejemplo 1 (continuación de la figura 11)

4.2. Solución del programa AMVI

Los valores se introducen en el programa AMVI tal como se indica en la figura 13:

The screenshot shows the AMVI software interface with the following sections:

- Frecuencias naturales:** A table with 4 rows and 2 columns. The first column is labeled 'Frecuencias naturales (Hz)'. The second column is empty.
- Modos propios:** A plot area with a y-axis from 0 to 1 and an x-axis from 0 to 1. A 'Guardar gráfica' button is at the bottom right.
- Condiciones de contorno:** Radio buttons for 'Libre - Libre', 'Empotrada - Libre' (selected), 'Empotrada - Empotrada', 'Empotrada - Apoyada', and 'Apoyada - Apoyada'.
- Geometría de la viga:** A 'Longitud (m)' input field with the value '0.5'.
- Tipo de sección:** Radio buttons for 'Rectangular' (selected), 'Cilíndrica', and 'Otra'. Below are input fields for 'Anchura (m)' (0.02), 'Altura (m)' (0.01), 'Diámetro (m)', 'Área transversal (m²)', 'Momento de inercia de la sección transversal (m4)', and 'Momento de inercia de la sección transversal (m4)'. There are also buttons for '+', '-', and 'Guardar gráfica'.
- Material:** A dropdown menu set to 'Aluminio'. Below are input fields for 'Densidad (kg/m³)' (2698.4) and 'Módulo de elasticidad (N/m²)' (69.e9).
- Masa puntual:** A checkbox 'Existe masa puntual' (unchecked). Below are input fields for 'Masa puntual (kg)' and 'Localización de la masa puntual desde el extremo izquierdo (m)'.
- Elementos finitos:** An input field for 'Número de elementos del algoritmo de elementos finitos' with the value '100'.
- Calcular:** A button at the bottom right.

Figura 13: Datos introducidos del ejemplo 1 en AMVI

Para obtener los resultados se pulsa el botón “Calcular”. Los resultados se muestran en la parte superior de la interfaz (figura 14):

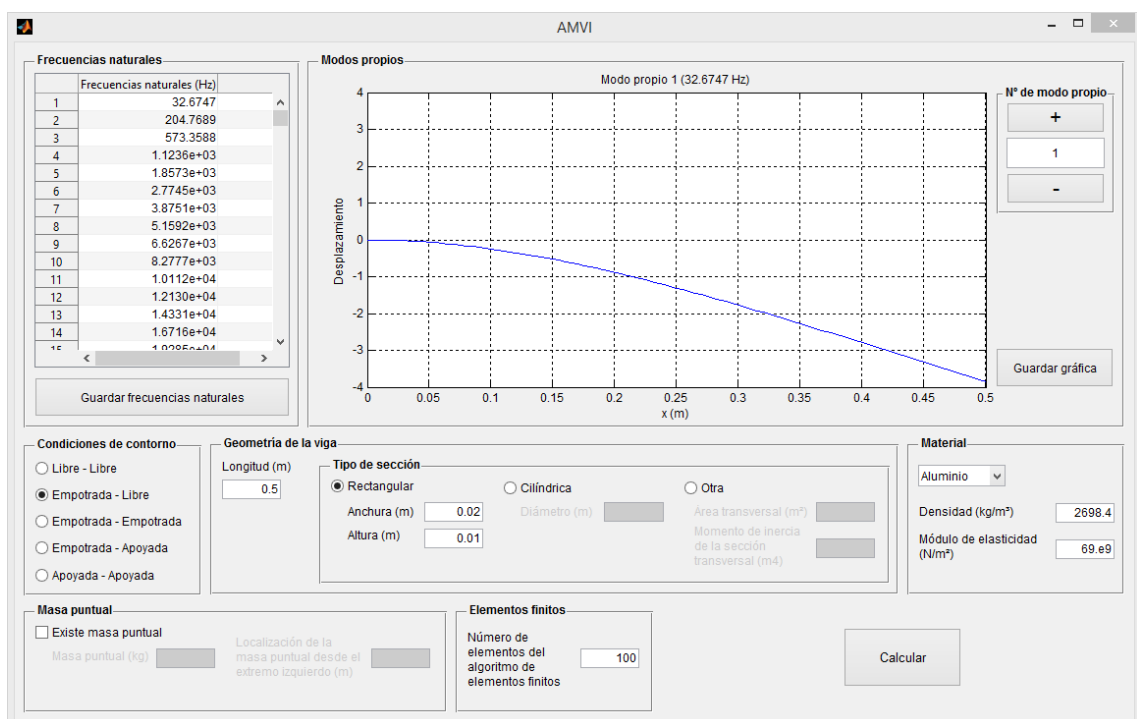


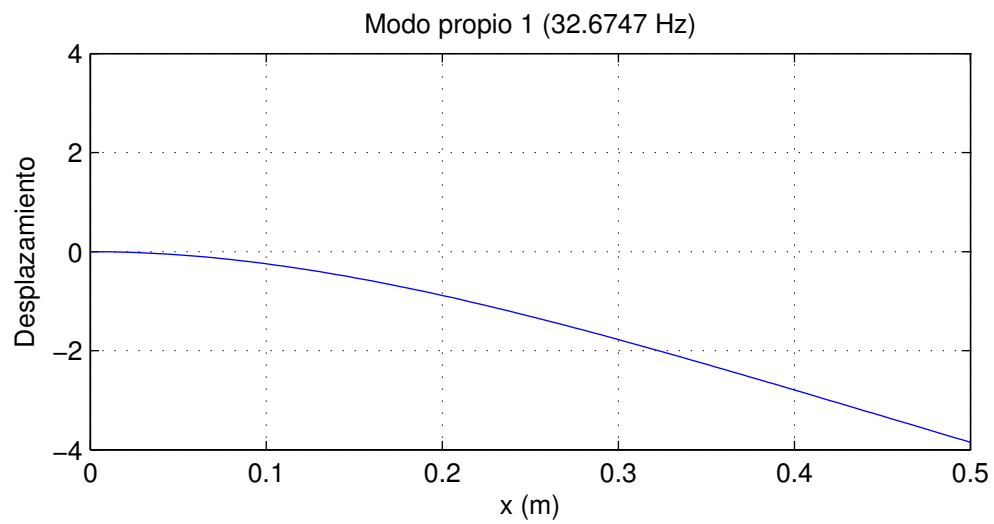
Figura 14: Resultados del ejemplo 1 en AMVI

Se muestran las 5 primeras frecuencias naturales en la tabla 12:

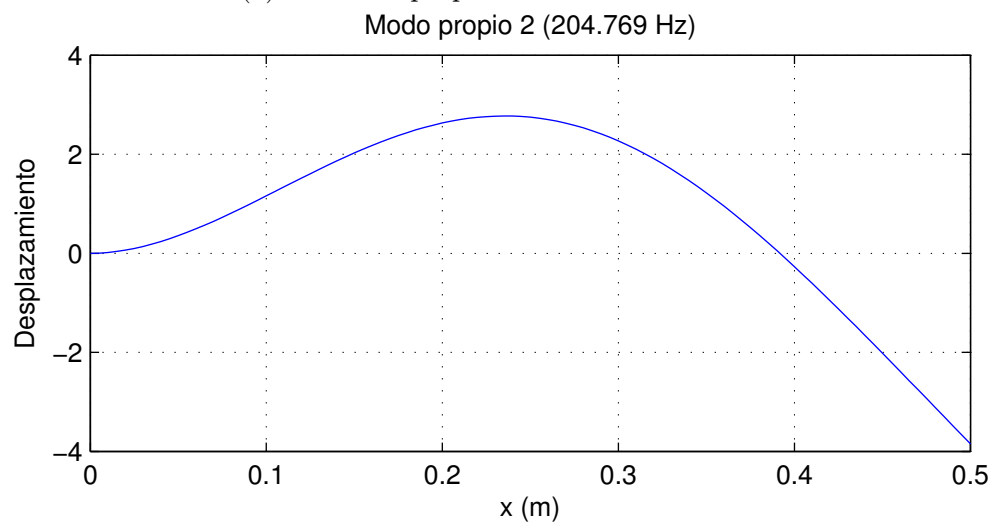
| Modo | $f_n(\text{Hz})$ |
|------|------------------|
| 1 | 32.67 |
| 2 | 204.77 |
| 3 | 573.36 |
| 4 | 1123.55 |
| 5 | 1857.32 |

Tabla 12: Primeras 5 frecuencias naturales numéricas del ejemplo 1

Los modos propios normalizados de vibración están representados en las figuras 15 y 16:

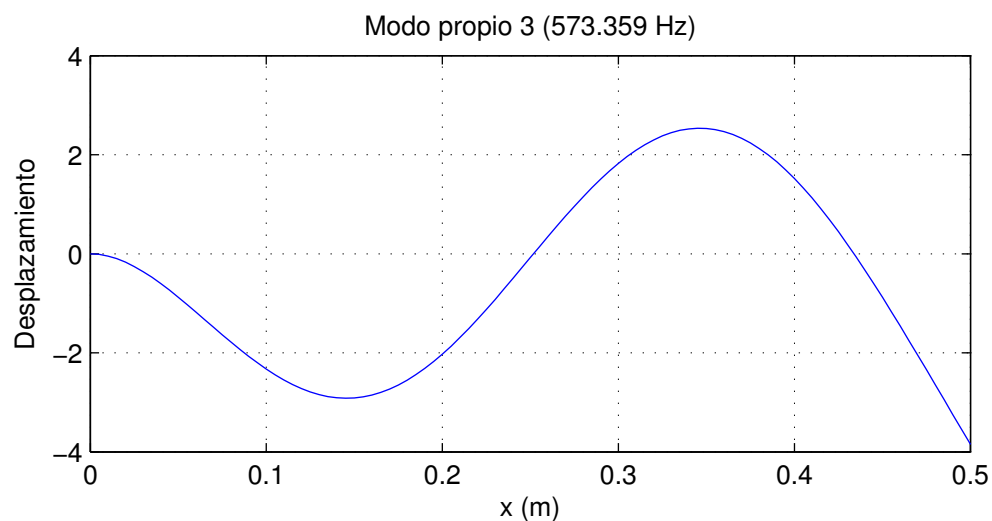


(a) 1^{er} modo propio normalizado numérico

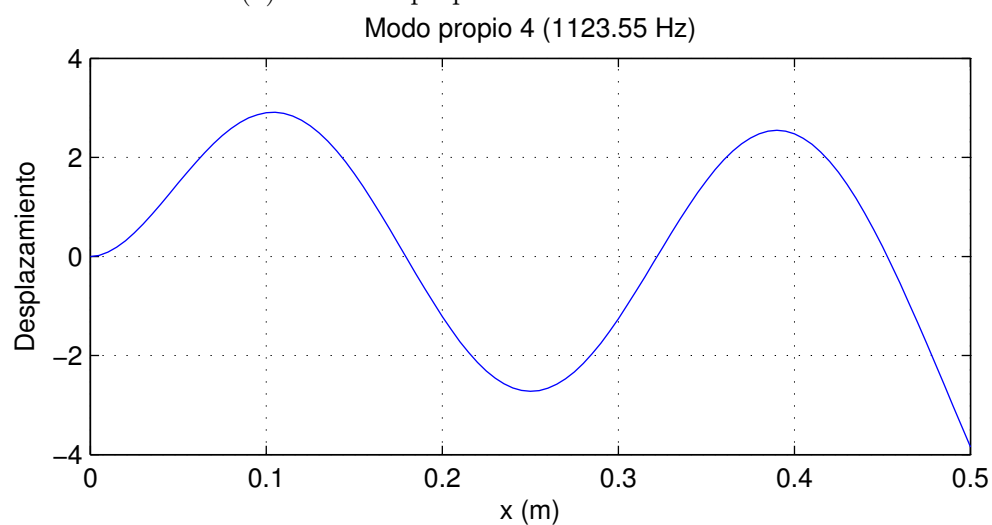


(b) 2^o modo propio normalizado numérico

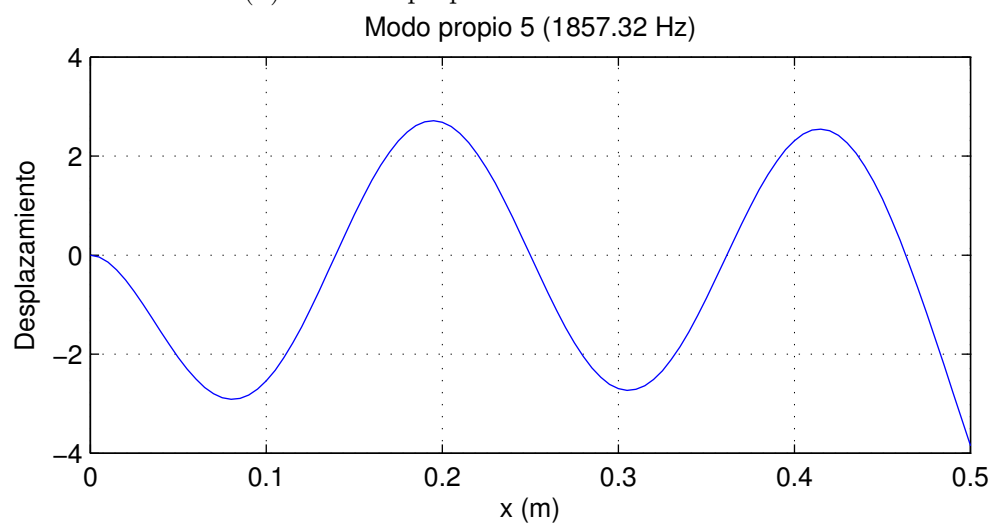
Figura 15: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos mediante AMVI (continúa en la figura 16)



(a) 3^{er} modo propio normalizado numérico



(b) 4^o modo propio normalizado numérico



(c) 5^o modo propio normalizado numérico

Figura 16: 5 primeros modos propios normalizados del ejemplo 1 obtenidos mediante AMVI (continuación de la figura 15)

4.3. Observaciones

En la tabla 13 se comparan los resultados teóricos y los obtenidos por el programa AMVI:

| Modo | f_n teórica (Hz) | f_n AMVI (Hz) |
|------|--------------------|-----------------|
| 1 | 32,67 | 32,67 |
| 2 | 204,77 | 204,77 |
| 3 | 573,25 | 573,36 |
| 4 | 1123,56 | 1123,55 |
| 5 | 1857,32 | 1857,32 |

Tabla 13: Comparación de las primeras 5 frecuencias naturales del ejemplo 1 por los métodos teórico y numérico

Puede observarse que los resultados teóricos y numéricos de la tabla 13 son prácticamente idénticos.

En las figuras 17 y 18 se comparan los modos propios de vibración teóricos y numéricos:

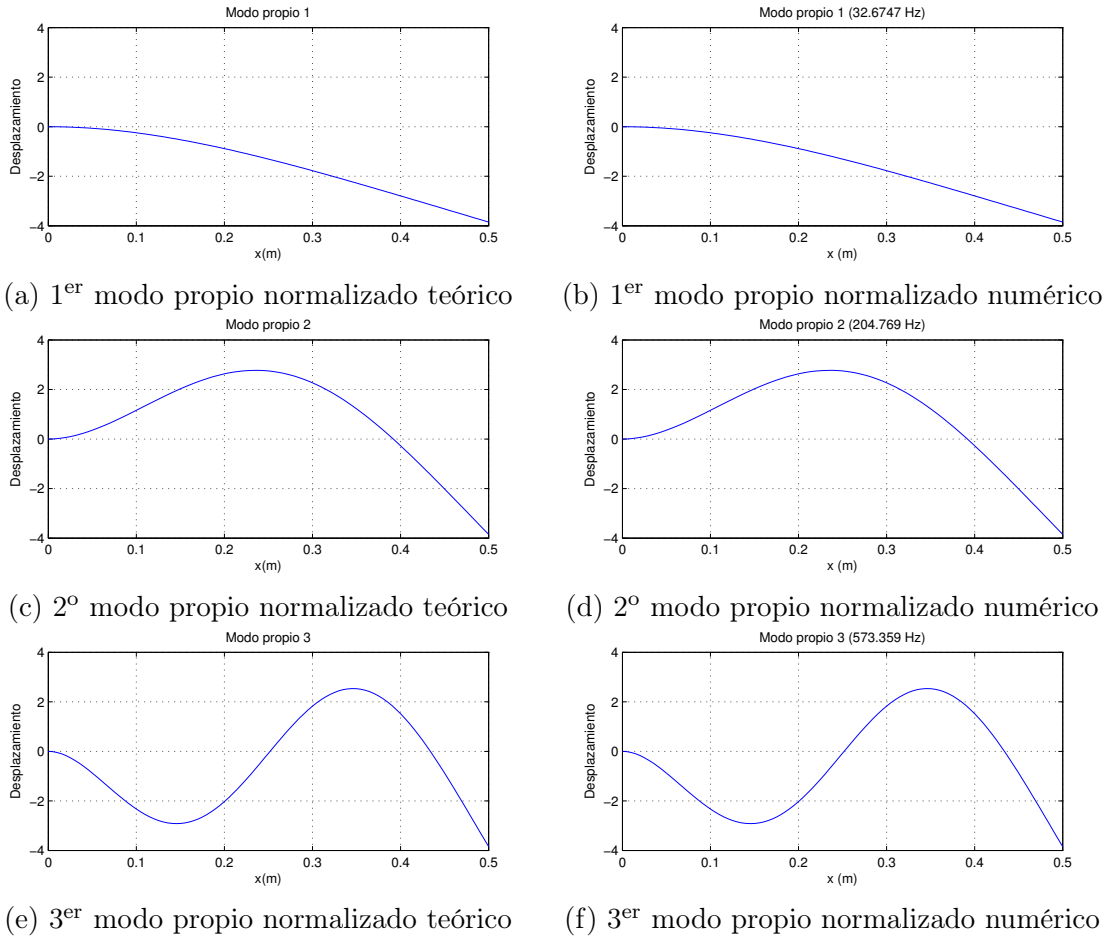
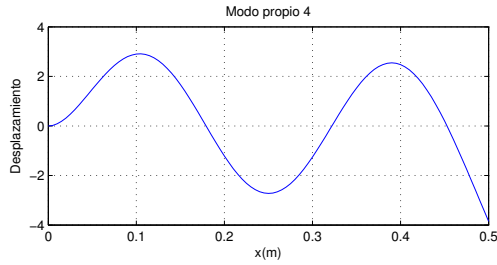
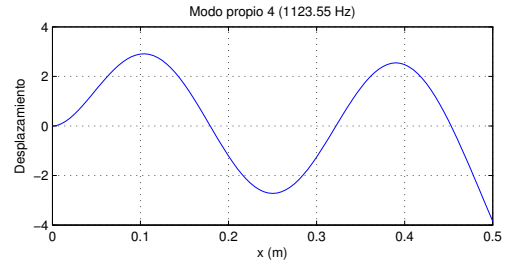


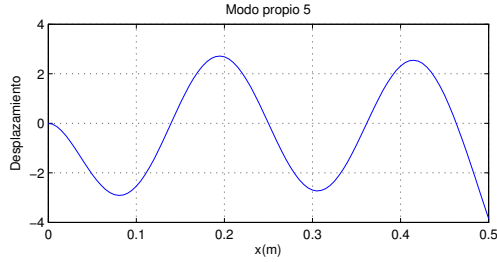
Figura 17: Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación en la figura 18)



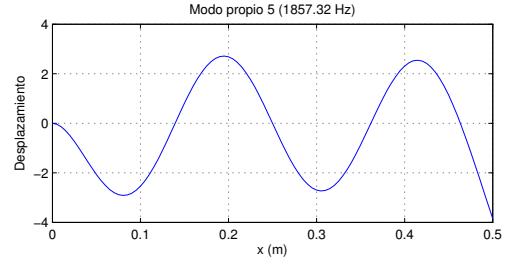
(a) 4º modo propio normalizado teórico



(b) 4º modo propio normalizado numérico



(c) 5º modo propio normalizado teórico



(d) 5º modo propio normalizado numérico

Figura 18: Comparación de los 5 primeros modos propios normalizados teóricos y numéricos del ejemplo 1 (continuación de la figura 17)

Al igual que en la tabla 13, puede afirmarse que no hay diferencias perceptibles entre los modos propios de vibración teóricos y numéricos de las figuras 17 y 18.

5. Tareas

El alumno ha de realizar las tareas mostradas a continuación mediante el programa AMVI.

1. Sea la viga de la tabla 14:

| Viga | |
|-------------------------|--|
| Condiciones de contorno | Libre - Libre |
| Longitud viga (L) | 1,5 m |
| Sección | Otra |
| | $A = 0,005 \text{ m}^2$ |
| | $I_y = 1,042 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| Material | Acero |
| | $\rho_{Ac} = 7850 \text{ kg/m}^3$ |
| | $E_{Ac} = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ |
| Masa puntual | No |
| Nº elementos finitos | 100 |

Tabla 14: Propiedades de la viga de la tarea

Se han de realizar los siguientes apartados mediante el programa AMVI:

- a) Introduzca las propiedades de la viga de la tabla 14 en el programa AMVI y obtenga sus frecuencias naturales y modos propios de vibración. Guarde las 3 primeras frecuencias, así como sus 3 primeros modos propios. En el caso de la condición de contorno “Libre - Libre” se han de guardar a partir de la 3ª frecuencia natural y el 3^{er} modo propio.

En los siguientes apartados, se solicita que se varíen las propiedades de la viga de la tabla 14 una a una. De tal forma que una vez modificada una propiedad de la manera indicada en cada apartado, se restaure el valor original de la tabla 14 para la modificación de la siguiente propiedad. Para cada apartado se realiza el análisis modal y se guardan las 3 primeras frecuencias naturales y los 3 primeros modos propios.

- b) Modifique la longitud de la viga con las siguientes magnitudes:
- $L = 1 \text{ m}$
 - $L = 2 \text{ m}$
- c) Modifique el área transversal:
- $A = 0,004 \text{ m}^2$
 - $A = 0,006 \text{ m}^2$
- d) Modifique el momento de inercia con respecto al eje y de la siguiente forma:
- $I_y = 1,042 \times 10^{-7} \text{ m}^4$
 - $I_y = 1,042 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
- e) Modifique la densidad:
- $\rho_{material} = 5000 \text{ kg/m}^3$
 - $\rho_{material} = 10000 \text{ kg/m}^3$
- f) Modifique el módulo de elasticidad:
- $E_{material} = 100 \times 10^9 \text{ Pa}$
 - $E_{material} = 300 \times 10^9 \text{ Pa}$
- g) Modifique el número de elementos finitos empleados:
- N° elementos finitos = 10
 - N° elementos finitos = 200

2. Sea la viga de la tabla 15:

| Viga | |
|--------------------------------|--|
| Condiciones de contorno | Libre - Libre |
| Longitud viga (L) | 1,5 m |
| Sección | Otra |
| | $A = 0,005 \text{ m}^2$ |
| | $I_y = 1,042 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| Material | Acero |
| | $\rho_{Ac} = 7850 \text{ kg/m}^3$ |
| | $E_{Ac} = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$ |
| Masa puntual | 5 kg |
| Posición masa puntual | Nodo y máximo |
| Nº elementos finitos | 100 |

Tabla 15: Propiedades de la viga de la tarea

Partiendo del 3^{er} modo propio de la viga de la tabla 14 localice las posiciones de un nodo y un máximo. Para dichas posiciones realice el análisis modal y guarde sus 3 primeras frecuencias y modos propios.

Siguiendo el mismo proceder que en los apartados anteriores, modifique la masa puntual para ambas posiciones:

a) Modifique la masa puntual:

- Masa puntual = 1 kg
- Masa puntual = 10 kg

3. Repita los pasos 2 y 3 para las 4 condiciones de contorno restantes:

- Empotrado - Libre
- Empotrado - Empotrado
- Empotrado - Apoyado
- Apoyado - Apoyado

4. Realice una memoria que recoja y compare los resultados de los apartados 1, 2 y 3. Asimismo, dicha memoria ha de responder a las cuestiones planteadas en el punto 6

6. Cuestiones

1. ¿Cómo varían las frecuencias naturales y los modos propios de vibración ante una variación de la longitud de la viga?
2. ¿Cómo varían ante la variación en el área de la sección transversal?
3. ¿Y ante un incremento del momento de inercia con respecto al eje y ?
4. ¿Cuál es el efecto que produce modificar la densidad del material de la viga?

5. ¿Y el módulo de elasticidad?
6. ¿Qué consecuencias tiene modificar el número de elementos finitos empleados en el análisis modal?
7. ¿Qué efectos produce la existencia de masa puntual en una viga? ¿Y si la masa puntual se sitúa en distintas posiciones? ¿Qué ocurre cuando se incrementa la masa puntual en una posición determinada?
8. Explique cuál es el comportamiento de los extremos de la viga bajo las distintas condiciones de contorno estudiadas.
9. En los análisis modales de la viga bajo las condiciones de contorno “Libre - Libre”, las primeras 2 frecuencias naturales son iguales a 0. Explique a qué situación física corresponde dicho comportamiento.
10. En el análisis modal inicial de la viga de la tabla 14, se emplean 100 elementos finitos. El número de frecuencias naturales obtenidas asciende a 202. ¿Por qué?
11. Indique en el análisis modal inicial de la viga de la tabla 14 a partir de qué modo propio de vibración se hace evidente la aparición de picos en su representación. ¿A qué es debido?

Capítulo 5

Conclusiones y desarrollos futuros

Llegados al presente capítulo, se está en condiciones de valorar la consecución de los objetivos planteados al principio del proyecto, así como sugerir posibles líneas futuras de desarrollo.

5.1. Conclusiones

El algoritmo de cálculo de frecuencias naturales y modos propios normalizados se ha implementado correctamente basándose en la teoría del capítulo 2. El apartado 3.2 demuestra cómo el programa AMVI es capaz de reproducir los resultados de ensayos experimentales con un margen de error despreciable, siempre que se emplee un número suficiente de elementos finitos en el cálculo.

El principal objetivo en el diseño de la interfaz gráfica del programa AMVI ha sido la sencillez, de tal forma que se ha logrado evitar el empleo de menús de ayuda para explicar el uso del programa. En el caso de que el usuario o alumno considere la afirmación anterior incorrecta, el guión redactado con el fin de realizar distintos análisis modales con el programa AMVI, incluido en el capítulo 4, puede considerarse un manual de usuario perfectamente válido. El guión describe la teoría sobre la que se desarrolla el programa y el correcto empleo de la interfaz gráfica.

De igual modo, el guión de prácticas del capítulo 4 contiene una sección de tareas a realizar y otra de cuestiones a responder. Ambos apartados tienen como objetivo poner de relieve cómo la variación de cada parámetro influye en la obtención de las frecuencias naturales y modos propios de un análisis modal, y de esta forma comprender el comportamiento de distintos sistemas bajo diferentes condiciones de contorno.

5.2. Desarrollo futuros

Los resultados del programa de análisis modal AMVI están limitados a los ofrecidos por la teoría de Euler-Bernoulli de vigas elásticas bajo distintas condiciones de contorno.

Desarrollos futuros del programa AMVI se listan a continuación:

- Inclusión de más condiciones de contorno a analizar. Por ejemplo: extremos libre y apoyado.

- Añadir más opciones de selección de secciones transversales y materiales.
- Análisis de distintos tipos de viga a partir de bases de datos.
- Mejoras en la interfaz para un manejo más intuitivo y dinámico de las salidas, es decir, las frecuencias naturales y modos propios de vibración.
- Implementar análisis modales basados en teorías distintas a la de Euler-Bernoulli: modelo de Rayleigh o modelo de Timoshenko.

El desarrollo de la interfaz del programa en Matlab fue una decisión a la vez lógica y práctica, debido a la sencillez de empleo de Matlab y su disponibilidad en las aulas informáticas de la Universidad Carlos III de Madrid. Tras finalizar el proyecto, y en vista a los posibles desarrollos futuros indicados anteriormente, sería razonable considerar otras herramientas para futuras implementaciones. Alternativas viables podrían ser la programación en el lenguaje de programación Python en conjunción con las librerías de interfaces gráficas como Qt o el lenguaje de programación C++ y librerías Qt.

Bibliografía

- [1] K. Billah y R. Scanlan. «Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Undergraduate Physics Textbooks». En: *American Journal of Physics* 59.2 (1991), págs. 118-124.
- [2] Tom Irvine. «Bending frequencies of beams, rods and pipes - Revision S». En: (20 de nov. de 2012). URL: <http://vibrationdata.com>.
- [3] Tom Irvine. *Vibration Data*. [Online; accedido el 17-12-2013]. 17 de dic. de 2013. URL: <http://vibrationdata.com>.
- [4] Felipe Lafita Babio e Hilario Mata Cortés. *Vibraciones Mecánicas en Ingeniería*. I.N.T.A, 1964.
- [5] K. H. Low. «On the eigenfrequencies for mass loaded beams under classical boundary conditions». En: *Journal of Sound and Vibration* 215.2 (1998), págs. 381-389.
- [6] Fadel Letícia F. Miguel, Fadel Leandro F. Miguel y Kern C. A. Thomas. «Theoretical and experimental modal analysis of a cantilever steel beam with a tip mass». En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 223 (1 de jul. de 2009), págs. 1535-1541.
- [7] Miguel Ángel Moreles y Salvador Botello. «Cálculo de frecuencias naturales para vigas elásticas con efecto de cortante e inercia rotacional. Caso empotrado-articulado». En: *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 21.1 (2005), págs. 3-21.
- [8] Arturo Quirantes. *La resonancia bien entendida (II): el puente Arcos de Alconétar*. [Online; accedido el 20-03-2014]. 15 de jun. de 2012. URL: <http://naukas.com/2012/06/15/la-resonancia-bien-entendida-ii-el-puente-arcos-de-alconetar>.
- [9] S.S. Rao y F.F. Yap. *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, 2011. ISBN: 9789810687120.